FORMALISATION DES STRUCTURES GÉOGRAPHIQUES DE BASE
DE L'ESPACE-TEMPS-MATIÈRE AU GÉOSYSTÈME

Patrice LANGLOIS
UPRESA 6063
Laboratoire Modélisation et Traitement Graphique
Université de Rouen

Nous voudrions ici faire partager les réflexions qui ont précédées et accompagnées la conception et le développement de différentes applications informatiques et en particulier le projet EdiCart Windows, que nous avons poursuivi depuis quelques années au sein du laboratoire MTG.

La conception d'un logiciel, au-delà des demandes des utilisateurs, reflète aussi, à travers ses choix de conception, une manière de représenter le monde, de traduire la réalité selon un certain modèle général. C'est de cette conception de l'espace, de la matière et des objets géographiques que nous voudrions parler ici car elle traduit un modèle général à travers une formalisation nécessairement rigoureuse pour être efficace au niveau informatique et cohérente pour l'utilisateur, suffisamment générale pour traiter le maximum de problèmes. Un logiciel ne pouvant traduire toute la réalité, le modèle est forcément simplificateur, réducteur de la réalité, mais c'est aussi ce qui permet de la mieux comprendre.

Par ailleurs, nous avons rencontré suffisamment de malentendus et d'ambiguïté sur le vocabulaire courant, à travers les différentes acceptions des termes utilisés (géographique, mathématique, informatique), qu'il nous apparaît nécessaire de les préciser par des définitions rigoureuses. De plus, le fondement et la cohérence même du socle théorique de base de la géographie nous paraît devoir être explicité de manière plus formelle, à travers une construction reposant sur des concepts mathématiques simples.

Les aspects théoriques développés ici, ne traitent d'aucun sujet géographique en particulier mais cherchent à identifier, expliciter, formaliser, construire ce qu'ils ont tous en commun. Ils vont dans le sens d'une formalisation des concepts géographiques fondamentaux dont le but n'est pas seulement de faire de la géographie théorique comme une fin en soi, mais de proposer un modèle géographique général et de donner ainsi le moule pour la construction de modèles particuliers, qui pourront être directement utilisées dans les logiciels. Cette formalisation concerne avant tout les notions d'espace, de matière, d'objet et de système géographique.

Le premier aspect fondamental qu'il faut envisager est celui de l'espace, dont la définition devrait être consensuelle au sein des géographes et qui pourtant est l'objet de discussions controversées comme par exemple : " l'espace géographique est-il isotrope ? " ou " est-il euclidien ? ", etc.

1. L'espace géographique

La portion d'espace étudiée par la géographie est celle qui environne la surface terrestre ; à ce titre notre espace est le même que celui étudié par la physique. Même si, de toute évidence, la géographie ne se situe pas dans un contexte relativiste (vitesses proches de la lumière) ni quantique (objets manipulés de l'ordre de grandeur des particules élémentaires), le cadre théorique dans lequel il se situe est donc clairement celui de la physique classique.

1.1. L'espace vide

L'espace est-il un absolu préexistant à l'homme, indépendant de lui, permettant de représenter de manière unique la localisation, la forme et la trajectoire des objets en mouvement ? Malheureusement non.

La simple expérience imaginaire suivante parlera d'elle-même. Un aviateur se déplace à vitesse constante en ligne droite au dessus du désert et laisse tomber (sans la lancer) une bouteille par la fenêtre de son avion. Il pourra observer sa trajectoire au cours de sa chute. Si l'on omet la résistance de l'air, il verra sa bouteille chuter constamment en dessous de lui, à la verticale, selon une trajectoire linéaire. Par contre, un habitant assis dans ce désert et regardant la bouteille tomber constatera sa trajectoire courbe, en forme de parabole. La pauvre mouche enfermée dans la bouteille, les pattes collées au fond, constatera que la bouteille est immobile par rapport à elle, sa trajectoire sera réduite à un point, mais verra par contre l'avion s'éloigner en spirale autour d'elle... Quelle est la vraie trajectoire de cette bouteille ensorcelée ? Il n'y en a pas, car l'espace est une notion relative à l'observateur. C'est la relativité newtonienne de l'espace.

Dans ce cadre, l'espace géographique est toujours relatif à un observateur fixe par rapport au globe terrestre. La description des objets est alors très correctement formalisée par une structure mathématique bien connue, l'espace affine euclidien E défini sur l'espace vectoriel $V=(3^3,+,\bullet)$. L'adjectif euclidien qualifiant un espace vectoriel, exprime que celui-ci est muni d'un produit scalaire, donc d'une norme (qui mesure les longueurs). Un espace affine est euclidien, lorsque l'espace vectoriel sur lequel il est construit est lui-même euclidien. Cette structure algébrique est associée à la réalité physique par l'intermédiaire d'un repère ou référentiel $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ dont l'origine et les axes (ou vecteurs de base) sont positionnés précisément par rapport à la Terre et qui joue le rôle de l'observateur (situé à l'origine et fixe par rapport à lui).

Le repère est arbitraire, mais, pour le géographe, il est toujours fixe par rapport à la terre. Ainsi, on appelle repère géodésique un repère dont l'origine est associée au centre de masse de la terre, l'axe des z associé à l'axe de rotation de la terre, l'axe des x qui coupe l'équateur au méridien de Greenwich, enfin l'axe des y qui est perpendiculaire aux deux autres, de manière à former un repère orthonormé, (avec une même unité, comme le mètre, pour les trois axes).

On appelle repère terrestre local, un repère fixe par rapport à la terre dont l'origine est un point généralement proche de la surface terrestre (souvent d'altitude nulle), dont l'axe des z est orienté verticalement et l'axe des x généralement parallèle au plan de l'équateur.

Il est possible de représenter l'espace avec des modèles plus complexes (par exemple en utilisant des géométries non euclidiennes pour représenter la surface du globe) mais l'espace affine euclidien est la structure la plus simple qui permette de décrire correctement les phénomènes dans l'espace géographique. Cette structure est confirmée tous les jours et depuis longtemps par l'expérience...

Mais il ne faut pas confondre le terme espace dans la réalité, qui est le milieu physique dans lequel nous nous déplaçons, et le terme espace comme structure mathématique. Même si le deuxième sert à modéliser le premier. Un espace en mathématique est une structure algébrique, c'est-à-dire un ensemble auquel sont associées des opérations (comme l'addition, la multiplication etc.). L'ensemble muni de ses opérations possède alors un certain nombre de propriétés qui permettent de caractériser le type d'espace. Ainsi le terme espace en mathématique est toujours suivi d'un adjectif (ou même de plusieurs) qui le qualifie. On parle ainsi d'espace vectoriel, d'espace topologique, d'espace de Hilbert, d'espace mesuré, etc. Ces espaces sont des concepts totalement abstraits qui peuvent à l'occasion servir à modéliser la réalité, même non spatiale.

La littérature géographique foisonne de définitions de l'espace. Nous n'irons pas comme dans [Beguin-Thisse 79] jusqu'à proposer une « axiomatique » de l'espace géographique, car nous n'avons pas besoin d'une nouvelle théorie mathématique pour représenter l'espace vide. Celle fournie par la géométrie euclidienne est parfaitement développée pour nos besoins et bien vérifiée par l'expérience dans le cadre de la physique classique qui est celui de la géographie (non quantique et non relativiste !). Le fait que la géographie ne se préoccupe pas que de l'espace mais aussi de l'homme et des sociétés qui y vivent, nécessiterait-il de bouleverser notre représentation de l'espace ? Je pense que non. Le « phénomène humain » ne modifie pas en soi la structure de l'espace ; même si pour l'étudier il faut développer des techniques particulières, celles-ci ne sont pas en contradiction avec les lois de la réalité « minérale ». La spécificité de la géographie réside au niveau de l'échelle auquel on aborde l'espace et c'est la spécificité de ce niveau qu'il faut développer dans une théorie de l'espace géographique en posant des hypothèses.

Employé tout seul, le terme espace désignera par la suite, l'espace newtonien avec un repère fixe par rapport à la terre (géodésique ou local). L'espace géographique sera la portion de l'espace limité au voisinage de la surface terrestre. On traite rarement de l'espace géographique en entier. Chaque problématique géographique précise ses limites de travail dans l'espace, noté par la suite *D*, le domaine d'étude.

1.2. La distance euclidienne

La distance entre deux points de l'espace affine est la norme (la longueur) du vecteur liant ces deux points. Plus formellement elle se définit par :

Distance dans l'espace E

Dans l'espace affine euclidien E sur 3^3 la distance euclidienne usuelle entre deux points A et B est définie par la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$:

$$d(A,B) = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right\| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2}$$

L'espace, ainsi muni de ses structures (affine sur un espace vectoriel euclidien de dimension 3) possède un certain nombre de propriétés simples mais fondamentales et très précises, qui ne sont pas vérifiées par n'importe quel sous-ensemble de points.

La distance usuelle que nous utilisons dans *E*, peut se généraliser, car on pourrait en définir d'autres, issues d'autres produits scalaires ou issues d'autres espaces mathématiques. Ces distances sont définies différemment mais possèdent les mêmes propriétés élémentaires que la distance euclidienne usuelle, aussi peut-on définir le concept général de distance de manière indépendante de la structure de l'espace.

Définition générale d'une distance

Une distance définie dans un ensemble E est une application d de E×E vers 3^+ qui vérifie les propriétés suivantes :

$\forall A, B, C \in E$ on a :

1 - *symétrie* : $d(A,B)=d(B,A)$

2 - $(A=B) \Rightarrow (d(A,B)=0)$

3 - $(d(A,B)=0) \Rightarrow (A=B)$

4 - *inégalité triangulaire* : $d(A,C) \leq d(A,B) = d(B,C)$

La distance euclidienne usuelle vérifie bien ces propriétés. Si on généralise à un espace vectoriel de dimension *n* quelconque, la distance euclidienne vérifie toujours ces propriétés. On peut définir une infinité de distances, distinctes de la distance usuelle.

La distance (on dit aussi métrique) est une notion mathématique très précise, conditionnant la structure même de l'espace euclidien auquel elle est associée, mais ce terme ne correspond pas exactement à la notion de distance utilisée en géographie, ce qui est une source de confusion considérable. En géographie la notion de distance est plus « molle ». Cela peut être la distance « à vol d'oiseau », la distance routière, la distance ferroviaire, etc. On va même introduire des termes comme distance-temps, distance-coût. Dans ce contexte, la notion de distance ne dépend pas seulement des points de « départ » et « d'arrivée » mais aussi de la trajectoire suivie entre ces deux points, on va même jusqu'à utiliser des critères qui ne sont plus spatiaux pour la calculer (temps, coût, etc.).

Comme pour le terme espace, on voit donc aussi apparaître une forte ambiguïté autour du terme distance, selon qu'on se situe dans un contexte de langage géographique ou mathématique. La notion de distance géographique en fait, est construite mathématiquement comme la longueur d'un trajet, ce qui renvoie au concept mathématique de mesure plus qu'à celui de distance. Même la distance à vol d'oiseau, en toute rigueur, n'est pas euclidienne car à la surface de la terre, cela représente la longueur d'un arc de cercle, alors que la distance euclidienne correspond à celle de la corde de cet arc (l'oiseau devrait voler sous la terre pour aller droit !). Quant aux distance-temps ou distance-coût, ce sont des mesures de durée ou de coût et non des distances mathématiques car elles ne vérifient pratiquement aucune des propriétés caractéristiques d'une distance.

L'espace euclidien ne décrit pas le contenu matériel de la réalité. Il n'est qu'un ensemble de localisations, de points P, définis par leurs coordonnées (x_P, y_P, z_P) dans 3^3. Mise à part leur position, tous les points sont identiques, non différenciés. De plus, la distance entre deux points est invariante par translation et par rotation, ce qui fait que l'espace euclidien, ne prenant pas en compte le contenu matériel et descriptif de l'espace est parfaitement homogène et isotrope.

> En somme, l'espace géographique est défini pour l'instant par un repère fixe par rapport à la Terre, à partir duquel toute localisation est définie dans l'espace affine euclidien sur 3^3 qui modélise l'espace comme étant vide, sans matière et hors du temps. Il est homogène et isotrope, c'est un continuum infini sans bornes extérieures ni intérieures (sans limites ni granulation, donc valide à toutes les échelles d'observation). La distance entre deux points A et B est intrinsèque à l'espace et ne dépend de rien d'autre que des points A et B. Elle est totalement indépendante du contenu matériel de l'espace.

Nous ne développerons pas les résultats théoriques et les méthodes de calcul qui sont associées à cette représentation de l'espace, ils peuvent se trouver dans de nombreux ouvrages de base de géométrie classique euclidienne et analytique. Ils sont plus spécifiquement appliqués à l'espace géographique à travers des disciplines comme la géodésie et la topographie. Explicitons néanmoins la notion générale de mesure car elle joue un rôle important en géographie elle est trop souvent confondue avec le terme de distance.

1.3. Mesure associée à l'espace

On ne définit pas une mesure directement sur les points de l'espace E car un point est infiniment petit et ne représente généralement pas une quantité mesurable. On doit alors considérer certaines parties de E convenablement choisies pour qu'elles puissent être mesurées, c'est-à-dire auxquelles on pourra associer une valeur numérique (non négative) qu'on appellera sa mesure, et les différentes parties de cette famille seront dites mesurables.

De plus, si l'on décide que deux parties A et B sont mesurables, on souhaite naturellement que $A \cup B$ mais aussi que A-B soient des parties mesurables de E. Ainsi, on donne le nom de clan à une famille de parties construite de cette façon, nous l'utilisons pour définir la notion de mesure :

> ***Définition d'une mesure***
>
> *Soit un clan $\mathcal{C}$ défini sur E. On appelle mesure définie sur $\mathcal{C}$, une application m de $\mathcal{C}$ vers 3^+, qui à tout élément A du clan $\mathcal{C}$ associe un nombre positif ou nul m(A) qui vérifie la propriété fondamentale d'additivité (simple) :*
>
> $$\forall A,B \in \mathcal{C},\ m(A) + m(B) = m(A \cup B) = m(A \cap B)$$

Si A et B sont disjoints, leur intersection est vide et la formule se simplifie car le vide est toujours de mesure nulle :

$$A \cap B = \Phi \Rightarrow m(A) + m(B) = m(A \cup B)$$

Souvent, nous utiliserons dans E, un domaine D qui sera partitionné en une famille $\mathcal{A}$ de parties $\{A_i\}_{i=1,\dots,n}$ de D qu'on appellera *grains* (on parle aussi d'*atomes*). Cette famille n'est pas un clan, mais sert de point de départ pour en construire un. Ainsi, on appelle clan engendré par $\mathcal{A}$, l'ensemble des parties de E constituant le plus petit clan contenant tous les A_i. On peut vérifier que D appartient alors à ce clan.

Ici aussi on confond souvent dans le langage la mesure *m* en tant qu'application et son résultat *m(A)* qui est un nombre.

Exemples :

1. le dénombrement des éléments d'une partie *A* de *D*,

2. une probabilité *p* définie sur un espace probabilisé (Ω, A, p),

3. la longueur d'une ligne, l'aire d'une surface, le volume dans 3^3 , ces mesures sont définies sur une tribu particulière, engendrée par les rectangles (dans 3^2) ou par les pavés (dans 3^3) qu'on appelle la tribu borélienne.

2. La matière géographique

Pour manipuler et modéliser le réel géographique, il faut néanmoins aller un peu plus loin que l'espace euclidien, et prendre en compte au moins la matière. Nous utilisons le terme matière dans un sens assez général. C'est pour nous aussi bien la terre, l'eau, l'air, la forêt, que les populations humaines, les édifices publics, etc. Ce contenu matériel n'est pas hors de l'espace, l'espace n'est pas le vide qu'il y a entre les choses, la matière est dans l'espace, la matière est ce que contient l'espace.

2.1. Le champ matériel

Pour enrichir l'espace de la notion de matière, on peut associer à chaque point une valeur décrivant la matière associée à ce point, c'est la notion de champ matériel. Mais l'espace ayant la puissance du continu, on peut avoir éventuellement une infinité de valeurs matérielles différentes entre deux points aussi proches que l'on veut, ce qui risque de rendre impossible la description du domaine qui serait alors essentiellement inobservable, car infiniment complexe.

> ***Définition d'un champ matériel***
> *Un champ matériel est une fonction* $f : E \rightarrow M$ *qui associe à tout point P d'un domaine D de l'espace E, une valeur* $v = f(P)$ *associée à ce point P.*

L'ensemble *M* des valeurs descriptives peut être de type très différent, cela peut être aussi bien le type de matière associée à chaque point ou une valeur numérique (populations, densités, températures) voire même vectorielle (vent dominant, pesanteur, déformation), décrivant les propriétés de la distribution matérielle en chaque point.

Un champ matériel apparaît ici comme une représentation théorique continue de la matière mais généralement non directement représentable en extension. L'observation d'une distribution matérielle aboutit à extraire, à construire une représentation plus simple, mais plus claire, différenciée car discrète. Ceci provient de l'instrument (œil, capteur, ordinateur, etc.) qui ne peut acquérir, restituer, traiter, assimiler qu'un nombre fini d'informations à partir d'une réalité infiniment complexe.

2.2. La différenciation spatiale de la matière

Différencier, c'est être capable de distinguer des choses différentes en deux lieux différents ou à des instants différents. La différenciation est un concept relatif à une observation. On ne distingue pas un couvert végétal de la même manière selon qu'on l'observe depuis un satellite, avec ses yeux ou avec une loupe. Cette propriété est dépendante de l'échelle d'observation, mais elle dépend aussi du processus d'acquisition de l'instrument. Par exemple, on ne voit pas la même chose si l'on « regarde » dans l'ultraviolet ou dans les longueurs d'onde radar. Cette constatation s'étend aussi à l'observation utilisée en géographie humaine, qui est plus institutionnelle, comme la réalisation d'une enquête, le calcul d'un PIB ou d'un taux de chômage.

Nous reviendrons plus loin sur le concept d'observation pour le préciser, mais développons ici la propriété de différenciation spatiale. Elle traduit cette possibilité de passer d'un champ matériel quelconque à une vision discrète de la matière à travers une observation : en tout point du domaine observé de l'espace où se trouve de la matière, il existe un voisinage de ce point de volume non nul, dans lequel la distribution matérielle est suffisamment régulière pour qu'on puisse « choisir » une valeur unique qui décrive correctement la matière dans ce voisinage. Un tel voisinage autour d'un point sera appelé grain matériel.

Cette propriété se traduit donc par deux choses, d'abord la possibilité de découper le domaine étudié en grains, ensuite la possibilité d'associer à chacun de ces grains une valeur descriptive de la matière qui soit une bonne traduction de la portion du champ matériel intérieure au grain.

Nous résumons ceci de manière plus formelle par l'énoncé suivant :

> ***Propriété de différenciation spatiale***
> *Soit f un champ matériel défini sur un domaine D de E et à valeur dans M. On dit que f possède la propriété de différenciation spatiale dans D, s'il existe une partition de D, appelée granularité* $G = \{A_i\}_{i=1,...n}$, *et une application* $m : G \rightarrow M$ *telle que la valeur* $m(A_i)$ *soit déterminée de manière unique à partir des valeurs de f sur* A_i.

L'application m est ce qui résulte de l'acquisition par l'instrument au cours de l'observation de la réalité représentée par f. Pour cela, on peut appeler m fonction d'acquisition.

2.3. Le principe de différenciation n'est pas en contradiction avec la richesse de la composition matérielle

Le fait que la valeur descriptive des points d'un même grain soit unique, n'empêche pas de décrire une situation matérielle complexe, par exemple, si une forêt est un mélange de n types d'essences on peut décrire la composition forestière de la forêt selon le nombre de pieds à l'hectare de chacune des essences par l'ensemble $M = 3^n$ où chaque valeur de M est un vecteur $m = (d_1, d_2,...,d_n)$ donnant les densités de chaque essence. On voit aussi dans cet exemple, que la granularité de l'espace envisagée est l'hectare, et que la description de cette forêt serait toute autre si l'on observait chaque centimètre carré de terrain.

Le principe de différenciation n'empêche pas de décrire une matière comme un mélange, mais oblige à une unicité de la description sur chaque grain.

2.4. La notion d'observation

Nous avons vu que si l'espace est relatif à l'observateur (lié au repère) la différenciation de la matière est relative au moyen d'observation. Nous utilisons ce terme d'observation dans un sens très général, non pas au sens d'observation statistique mais comme une extension d'un acte de perception humaine dans une volonté de comprendre ou de décrire une certaine portion déterminée de la réalité, donc plutôt comme un processus de description d'une portion de l'espace-temps-matière. L'observation n'est pas forcément explicative, mais elle doit être intelligible.

La matière apparaît différenciée en grains par le processus même d'observation qui crée donc une granularité à partir de la distribution spatiale de la matière. Elle est déterminée par le pouvoir séparateur (écart minimal entre deux grains matériels distincts) mais l'observation influe aussi sur le choix thématique de description de la matière.

On voit que la capacité de différenciation spatiale d'un instrument est associée à une capacité de choisir une valeur descriptive unique pour l'ensemble infini des points d'un même grain et ceci pour tous les grains du domaine observé. Cette capacité est-elle une propriété intrinsèque à la matière ou seulement une dégradation de l'information due à l'imperfection de l'instrument ? Toujours est-il qu'on peut construire des instruments de plus en plus précis, mais il semble impossible de pouvoir en fabriquer un capable de restituer une quantité infinie d'informations. Néanmoins, le caractère discret de toute observation n'est pas en contradiction avec le fait qu'un ensemble d'observations (ou d'expériences) puisse être cohérente avec une théorie de la matière qui soit continue. Ceci peut s'effectuer en construisant, en explicitant la fonction d'acquisition m à partir du champ matériel théorique f.

Mais ici nous nous intéressons surtout à une formalisation de l'observation qui soit compatible avec le caractère discret de toute représentation instrumentale et en particulier informatique.

Pour résumer, une observation est une opération qui prend sa donnée dans la réalité et aboutit à un résultat qui est un ensemble fini d'informations. Ainsi, une observation comprend toujours :

- 1. un observé ou champ d'observation, qui est un domaine de la réalité matérielle spatio-temporelle ;
- 2. un observatoire ou instrument, que ce soit l'œil, un satellite de télédétection ou l'infrastructure nécessaire à un recensement de population. Il détermine une granularité spatiale (ou spatio-temporelle). Il comprend la partie purement instrumentale mais aussi l'infrastructure humaine et le traitement scientifique et technique jusqu'à la mise en forme finale de l'information, aboutissant à une représentation intelligible par rapport à l'objectif d'observation attendu ;
- 3. le résultat de l'observation est constitué de l'ensemble fini des valeurs descriptives matérielles associées aux grains ;
- 4. et un observateur qui fixe, en amont du processus, le point de vue à la fois thématique et l'emprise spatiale qu'il souhaite observer (par son choix de l'instrument et le paramétrage instrumental) et, en aval, qui interprète et valide le résultat par rapport à ses attentes.

2.5. Définition formelle d'une observation

Définition

Une observation est définie par un quadruplet (D, G, M, m) formée d'un domaine d'observation D qui est une partie le l'espace euclidien E, d'une granularité définie par une famille finie $G = \{A_i\}_{i=1,\ldots,n}$ de parties formant une partition de D, d'un ensemble descriptif M et d'une application m qui associe à chaque grain A_i de G une valeur m_i de M. L'application m est appelée variable d'acquisition.

2.6. Conclusion sur la matière

L'introduction de la matière dans l'espace ajoute en quelque sorte trois nouvelles « dimensions[1] » : une dimension « verticale » d'empilement des thèmes sous lesquels on peut aborder la matière, une dimension « horizontale » dans la diversité des valeurs possibles de la matière pour un thème donné, et enfin une dimension en « profondeur », celle des échelles, qui fait apparaître en un lieu selon l'échelle d'observation, de nouveaux thèmes de description avec de nouvelles valeurs de répartition, c'est-à-dire une composition différente de la matière propre à chaque échelle d'observation.

3. Le temps

Même si le temps n'est pas un élément primordial en géographie, il doit être pris en compte dès que l'on veut décrire des phénomènes qui se déroulent à la surface de la Terre, cela introduit encore une autre « dimension » au modèle. Dans ce cadre spatio-temporel[2], les valeurs descriptives de la matière peuvent changer à chaque instant t. Le principe de différenciation doit alors être généralisé par rapport au temps en imposant que la matière observée possède une certaine constance dans la durée.

Pour cela il faut d'abord généraliser la notion de champ matériel en introduisant un paramètre de temps. Un champ de matière spatio-temporel est alors une fonction qui dépend d'un paramètre t et qui associe à chaque point P une valeur matérielle v unique appartenant à l'ensemble M des valeurs possibles :

$$f_t : P \rightarrow v = f_t(P)$$

Remarquons que f peut aussi se formuler comme une fonction de deux variables $(P, t) \rightarrow f(P, t)$.

On peut alors énoncer le

Principe de différenciation spatio-temporelle
Soit f un champ matériel spatio-temporel défini sur un domaine D×T de Ex3 et à valeur dans M. On dit que f possède la propriété de différenciation spatiale dans D×T, s'il existe une partition finie de D×T, appelée granularité $\mathrm{G} = \{B_{ij}\}_{i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots k}$*, où i est un indice spatial et j un indice temporel. Chaque grain* B_{ij} *étant de volume et de durée non nulle. Enfin, s'il existe une application m :* $\mathrm{G} \rightarrow M$*, telle que la valeur* $m(B_{ij})$ *soit déterminée de manière unique à partir des valeurs de f sur* B_{ij}.

4. L'objet géographique

4.1. La fonction d'identification

Nous avons utilisé dans l'exemple 2, le terme de « zones identifiées » sur la photo pour définir une granularité, cette identification n'est pas neutre ni absolue, elle dépend d'une interprétation. Nous aurions pu utiliser le terme de « zones différenciées de grisé homogène » pour définir la granularité, qui est une notion plus mécanique, automatisable. Certains monuments pourraient coïncider avec de tels grains, comme un calvaire, mais la plupart ne seraient pas des objets identifiables car formés de plusieurs zones non homogènes entre elles, voire non connexes, comme un cimetière. Se trouve ainsi posé le problème de l'objet géographique, à partir de la granularité observée.

L'objet apparaît comme un ensemble identifié constitué de grains homogènes différenciés. Le terme identifié indique qu'on peut le relier à un système de représentation extérieur et qui en constitue le sens. La plupart du temps, cette relation est le nom de l'objet, qui est un lien cognitif renvoyant à une signification pour l'observateur. Dans un système d'information, il n'y a pas de signification intrinsèque, cette identification est seulement un identifiant qui permet une liaison fonctionnelle à des tables contenant une certaine description de l'objet à travers des valeurs de certains attributs thématiques.

Formellement, étant donné une observation $O=(D,\mathrm{G},M,m)$ où $\mathrm{G} = \{A_{ij}\}_{i=1,\ldots,n}$ on définit un ensemble d'identifiants J et une fonction d'identification $\Phi : \mathrm{G} \rightarrow J$ qui associe à chaque grain A_i un identifiant $\Phi(A_i) = j$. La relation réciproque Φ^{-1} définit des classes d'équivalence, qui constituent une partition de G, ces classes sont appelées objets observés relativement à Φ. L'objet identifié par j (plus simplement on parlera de l'objet j) est alors $\Phi^{-1}(j)$, le sous-ensemble des grains vérifiant $\Phi(A_i) = j$.

4.2. Le support spatial d'un objet

Chaque objet j possède un support spatial S_j qui est constitué par la réunion de ses grains :

$$S_j = \bigcup_{\varnothing(A_i)=j} A_i$$

4.3. Description associée à un ensemble d'objets

L'objet j possède aussi une description x_j qui résulte d'une opération de sommation, de combinaison ou d'agrégation, des valeurs matérielles de chacun de ses grains. Il en résulte une application $X : j \rightarrow R$ appelée variable descriptive, où $x_j = X(j)$ est la description matérielle de l'objet j. Chaque objet apparaît donc comme un couple (S_j, x_j) où S_j est une partie de mesure non nulle (c'est un élément du clan engendré par les grains A_i) et x_j un élément de R, qui peut être un ensemble de données qualitatives, ou quantitatives.

Il arrive souvent que la description d'un même ensemble d'objets nécessite l'utilisation de plusieurs variables descriptives concernant le même domaine descriptif (ex : population des communes décrite selon chaque CSP). Ces variables seront alors groupées en un tableau de variables appelé aussi une thématique : $T = (X_1, X_2, \ldots, X_p)$ avec $T(j) = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_p = R$. Une thématique peut être éventuellement réduite à un thème.

Par exemple, étant donné une observation $O = (D, \mathrm{G}, M, m)$ où $\mathrm{G} = \{A_i\}_{i=1,\ldots,n}$ si m est une mesure, le support d'un objet j est donc mesurable et sa valeur descriptive peut être la mesure de son support qui est la somme des mesures de ses grains :

$$m_j = m(S_j) = \sum_{\varnothing(A_i)=j} m(A_i)$$

4.4. Les types d'objets

Dans l'espace tridimensionnel E, le domaine d'étude D peut être une partie de dimension 3, mais il peut être aussi une surface, par exemple l'ellipsoïde de grand rayon a et de petit rayon b est défini par la surface $D_{a,b} = \{P \in E \; P = x, y, z)\}$ vérifiant $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$.

Bien que, dans la réalité, tous les objets matériels disposés sur la surface terrestre (les maisons, les arbres, etc.) soient tridimensionnels, lorsque ceux-ci sont de hauteur suffisamment petite devant l'ellipsoïde, on considère leur hauteur nulle ce qui en fait des objets bi-dimensionnels (surfaciques) inclus dans la surface de l'ellipsoïde. Il faut alors les mesurer comme des surfaces. De même, lorsque certains objets sont suffisamment peu hauts et peu larges devant leur longueur, comme des routes ou des cours d'eau, on peut les exprimer comme des objets linéaires, et d'autres comme des points. Ces objets peuvent être exprimés dans un espace tridimensionnel (3^3) ou bi-dimensionnel si l'on raisonne en projection (3^2). Il ne faut pas confondre la dimension de l'objet, qu'on appelle aussi son type (type volumique, surfacique, linéaire ou ponctuel) et la dimension du référentiel (de l'espace euclidien) dans lequel il est inclus. Par exemple, si une route est représentée par un objet linéaire, le fait qu'elle soit dans 3^2 ou dans 3^3 est différent, car sa longueur dans le premier cas ne va pas tenir compte des cotes, elle sera donc plus longue dans 3^3 que dans 3^2.

Aussi, on sépare les objets en couches d'objets de même dimension, de manière à n'avoir qu'un seul type de mesure spatiale par couche, qui s'applique à tous les objets de la couche Nous verrons plus loin, une définition plus complète d'une couche d'objets.

4.5. Sur le principe d'impénétrabilité

Le fait que la relation d'identification soit une fonction $\Phi : \mathrm{G} \rightarrow J$ est pratique, mais restrictif. En effet, cela impose que chaque grain matériel soit attribué à un objet au plus, cela est naturel et traduit le fait que les objets ne peuvent s'interpénétrer. Le fait que ce soit une fonction et non une application autorise que certains grains de matière n'appartiennent à aucun objet, il reste alors des espace matériels qu'on peut appeler intersticiels. Dans certains cas, néanmoins rares, il peut être utile d'affaiblir le modèle et d'autoriser la possibilité aux objets de s'interpénétrer. La relation d'identification n'est plus alors fonctionnelle et certains grains peuvent appartenir à plusieurs objets. On ne peut plus parler de partition du domaine de définition. C'est le cas de l'exemple de l'intercommunalité. Un groupement de communes, un SIVOM, un syndicat mixte, est un sous-ensemble de communes liées par la gestion d'une même activité, comme le ramassage des ordures ménagères. Mais chaque commune peut appartenir à plusieurs groupements intercommunaux d'où le recouvrement important de ce genre d'objets entre eux.

4.6. L'objet, individu qui se construit entre deux multitudes, intérieure et extérieure

Un objet se construit de l'intérieur par son identité propre qui résulte de la réunion et de l'interaction de ses différents constituants internes, (qui peuvent éventuellement être perçus à un niveau plus fin d'observation comme des objets) ou tout au moins comme un ensemble de grains matériels différenciés et ayant une signification pour l'observateur. Un objet se construit aussi de l'extérieur par les contraintes spatiales qu'il entretient avec ses voisins directs et indirects et toutes les interactions définies avec les autres objets du domaine, voire même avec des influences extérieures. La description de ces interactions ne s'explique en général qu'à travers une dynamique temporelle qui peut être expliquée par des lois physiques (évolution du relief par les lois conjuguées de l'érosion et de la tectonique des plaques) ou des lois sociales (évolution d'une population, d'un habitat, d'un paysage, en fonction de la culture de l'organisation politique, économique, sociale, etc. du groupe) Ces lois, qu'elles soient physiques ou sociales, ne sont pas « inscrites » dans l'espace, mais elles peuvent se traduire quelquefois par des fonctions qui permettent de décrire les objets ou les relations entre objets, dans l'espace-temps (de manière synchronique et diachronique). Ceci nous amène à considérer la notion de système géographique pour prendre en compte cet aspect plus globalisant, organisationnel, phénoménologique des objets.

5. La notion de géosystème

La notion de système recouvre un grand nombre d'acceptions différentes, selon les bases philosophiques dont elles sont issues, qu'elles soit finalistes, téléologiques ou plus mécanistes, causales, il faut tenter ici, au delà des présupposés philosophiques, une définition unique qui puisse définir une structure générale, un moule assez souple, susceptible de s'adapter au plus grand nombre d'approches et de problèmes concrets possibles.

5.1. Dualité d'approche d'un système

Deux directions semblent se dégager pour approcher un système. Il y a l'approche objet et l'approche fonctionnelle. Dans l'approche objet, le système est perçu dans sa diversité matérielle, mais formant un tout au sein d'une organisation, d'une structure qui gère l'interaction, les échanges, la cohérence, les contraintes entre les différents éléments de l'ensemble, tel le corps humain, composé de cellules entre lesquelles circulent des flux, (nerveux, sanguins), cellules formant des groupes différenciés selon leur activité, constituant des tissus. Dans l'approche fonctionnelle, on ne s'intéresse pas à l'organisation matérielle, spatiale, mais à l'activité, aux fonctions et fonctionnalités que l'on découvre dans le système. Ces fonctions sont d'abord définies au niveau global, puis éventuellement décomposées en sous-fonctions au sein de chaque sous-système. Chaque fonction consomme des intrants et produit des extrants. Chaque fonction peut être contrôlée par les extrants d'autres sous-systèmes. Dans un système d'information les flux sont des informations, dans un système géographique les flux peuvent être très divers, physiques (cycle de l'eau), humains (déplacements), économiques (financiers, marchandises), socio-politiques, énergétiques, informationnels, etc.

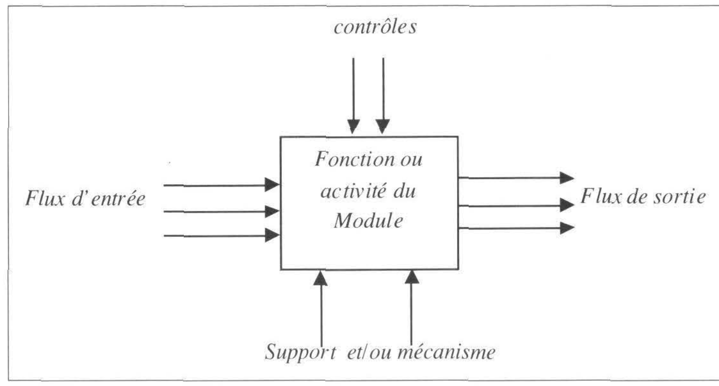
Ces deux approches sont complémentaires. La première, plus « anatomiste », descriptive, est plus fine que la seconde, car elle explicite tous les éléments matériels (les objets) et les relations entre ces éléments du système, cette approche est nécessaire pour construire un système (il faut connaître la forme, la position et l'interaction de chaque pièce et chaque boulon d'une voiture pour pouvoir la construire, de même pour un logiciel, ou un ensemble architectural). La deuxième est plus « physiologiste », plus synthétique, non spatiale, abstraite et elle permet de comprendre ou de concevoir plus que de décrire ou construire.

5.2. L'approche fonctionnelle

On peut représenter graphiquement cette approche par la méthode SADT, qui explicite chaque sous-système (appelé module) à partir du système général, en mettant en évidence, dans chaque module, sa fonction (on dit aussi son activité) des flux d'entrée, de sortie, des contrôles et des mécanismes, selon la symbolique de la figure 1.

Par exemple, pour modéliser le système de gestion des déchets ménagers dans un département, le système fonctionnel peut se décomposer, d'un point de vue technique, en quatre fonctions principales : collecte, traitement, transport, stockage. Le sous-système de collecte peut se décomposer lui-même en : global en porte-à-porte, sélectif en porte-à-porte, sélectif par apport volontaire dans des conteneurs. Le sous-système de traitement peut se décomposer en : incinération (simple ou avec récupération d'énergie), compostage, recyclage. On pourrait ainsi décomposer toutes les fonctions principales et les sous-fonctions jusqu'à un niveau élémentaire indécomposable, ou suffisamment fin pour le point de vue considéré.

Figure 1 - Schéma de principe d'un module sous SADT



5.3. L'approche objet

Dans l'approche objet, on voit apparaître la décomposition spatiale en objets qui structurent la gestion des déchets : découpage du département en secteurs, eux-mêmes divisés en sous-secteurs. Chaque sous-secteur est décomposé en syndicats de collectes, qui sont composés de cantons et de communes. Ensuite, chaque installation (déchetterie, incinérateur, centre de stockage, etc.) est implantée dans une commune (et par inclusion dans les autres niveaux de découpage) chaque installation étant reliée aux lieux de collecte (habitations) et aux autres installations par le réseau de transport.

5.4. Dualité fonction-objet

Chaque activité prend corps dans le système d'objets à travers un support dans lequel se déroule un mécanisme et chaque objet prend un sens à travers les fonctions qu'il assume dans le système.

Mais l'activité peut aussi se décomposer en sous-activités permettant de mieux comprendre ou décrire l'activité globale. La relation C se décompose alors en deux relations partielles C_1 et C_2. Une activité peut aussi se décomposer en plusieurs sous-activités consécutives, la relation globale C_1 est alors une composition de relations : $C_1 = C'_1 \circ C'_1$.

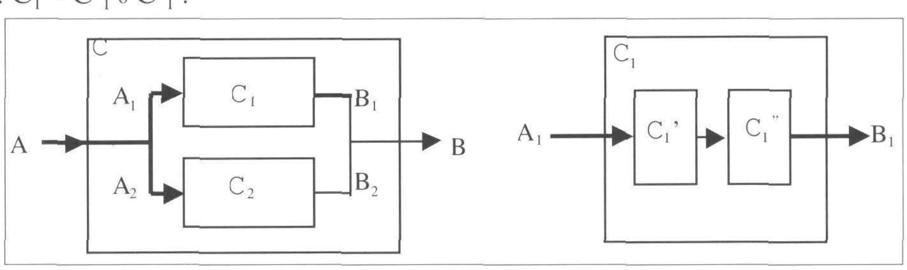


Figure 2 - Décomposition d'un module

On voit sur ces quelques exemples, comment se structure le système par affinages successifs, aussi bien de ses flux (qui séparent progressivement l'ensemble des objets en sous-ensembles différenciés) que de ses activités qui décomposent la relation générale en relations plus élémentaires.

Après l'aspect purement qualitatif, conceptuel, de la décomposition, peut intervenir, l'aspect quantitatif, permettant de modéliser par des équations les différents flux et les relations qui les transforment.

5.5. Système élémentaire ou non

La première étape de la construction d'un système est basée sur un seul ensemble d'objets résultant d'une même observation. C'est un système élémentaire. Mais dans un souci de généralité, il faut voir un système comme la synthèse de nombreuses observations cohérentes entre elles, permettant de dégager une organisation d'ensemble qui soit cohérente. Il faut voir alors un système sous un double aspect intensif et récursif. Intensif par la multitude des points de vue (thématiques) à une échelle donnée, sous lequel il peut être abordé, récursif par son organisation en profondeur, où chaque objet peut être lui-même considéré, à un niveau plus fin comme un système. Un système se définit alors soit comme étant élémentaire soit comme l'organisation d'un ensemble de systèmes, appelés ses sous-systèmes. Cette organisation se fait selon deux dimensions : l'aspect intensif (vertical) sera formalisé par un empilement de couches et l'aspect récursif (en profondeur) par emboîtements hiérarchisés des objets constitués en objets constituants.

5.6. Couche d'objets

La notion de « couche d'objets » nous permet de faire un premier pas dans la mise en place d'une organisation pour arriver à la notion de système. Une couche est un ensemble d'objets cohérents entre eux, c'est-à-dire tous du même type de support et auxquels est associé une même structure de description (thématique). Par exemple, un département est partitionné en communes, qui sont les objets, à chaque commune est associé un support spatial (une surface polygonale) et une description, (identificateur INSEE, nom de la commune, population, superficie, etc.). De manière formelle, une couche est constituée de l'ensemble J de ses objets, et de deux fonctions l et T, la fonction l associe à chaque objet j son support$l$ (j) et la fonction T sa description $T(j)$ (T comme thème ou thématique). D'où la définition suivante :

> ***Définition***
>
> *On appelle couche d'objets géographiques, une structure $C=(D, \mathrm{C}, J, l, T)$ où :*
>
> *– D est le domaine d'observation de l'espace euclidien E,*
>
> *– C est le clan des parties mesurables engendré par les grains liés à une observation,*
>
> *– J l'ensemble des identifiants d'objets,*
>
> *– l la fonction de localisation qui associe à chaque objet j un support spatial $S_j \in \mathrm{C}$ (S_j) est appelé aussi lieu de l'objet j),*
>
> *– T une thématique descriptive, avec :*
>
> $$T(j) = (x_1^j, x_2^j, \ldots, x_p^j) \in D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_p$$
>
> *les ensembles D_i, pour j variant de 1 à p, étant les domaines descriptifs respectifs des p thèmes (attributs) de T.*

5.7. Géosystème élémentaire

Nous pouvons maintenant formaliser la notion de système élémentaire, à partir d'une ou plusieurs couches d'objets.

Considérons k couches C_i pour i variant de 1 à k sur un même domaine D et une même granularité. Nous appellerons empilement, un tel ensemble de couches. Chaque couche est munie d'une thématique T_i qui est représentée par une matrice M_i de hauteur h_i (qui est le nombre d'objets de la couche) et de largeur l_i (qui est le nombre de thèmes de la thématique). On écrit alors : $M_i \in \mathrm{M}\,(h_i, l_i)$ où $\mathrm{M}\,(h_i, l_i)$ est l'ensemble des matrices de hauteur h_i et de largeur l_i. Formellement on peut toujours réunir les objets de toutes les couches et toutes les thématiques en une seule matrice

$$M \in \mathrm{M}\,(\sum_{i=1}^{k} h_i, \sum_{i=1}^{k} l_i)$$

où chaque matrice M_i de couche est un pavé de M se présentant sous la forme

$$M = \left[\begin{array}{c:c:c:c} M_1 & \mathrm{O} & \ldots & \mathrm{O} \\ \hdashline \mathrm{O} & M_2 & \ldots & \mathrm{O} \\ \hdashline \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hdashline \mathrm{O} & \mathrm{O} & \ldots & M_k \end{array}\right]$$

Ceci permet de formaliser la partie descriptive d'un empilement de couches comme une seule matrice $M \in \mathrm{M}\ (h, l)$ où h est le nombre total d'objets, l le nombre total de thèmes et dans laquelle chaque ligne correspond à la description d'un objet, et chaque colonne à la description d'un thème.

Dans un système, du point de vue fonctionnel, un module est composé d'un triplet (E,A,S) où $E = (E_1, E_2,..., E_p)$ sont les p flux d'entrée, A l'activité qui consomme ces entrées et produit $S = (S_1, S_2,..., S_p)$ les q flux de sortie. Ces flux doivent être définis à partir des objets de l'empilement et les entrées doivent être reliées aux sorties par le mécanisme de l'activité.

En fait, une entrée comme une sortie correspond à un thème de l'empilement, c'est-à-dire à un vecteur de 3^h si tous les thèmes sont codés dans 3. L'ensemble E des entrées est donc une sous-matrice de M correspondant à une sélection de thèmes (thèmes d'entrée) et de même pour S. Eventuellement, certaines sorties peuvent être constituées de thèmes utilisés en entrée, il est préférable alors de dupliquer ces thèmes pour pouvoir distinguer l'état d'entrée et celui de sortie dans le thème. Nous considérerons donc que les thèmes d'entrée et de sortie sont tous distincts. En réorganisant éventuellement la matrice M et en supprimant les thèmes non présents en entrée ou en sortie, elle peut s'écrire alors sous forme de deux pavés matriciels $E \in \mathrm{M}\ (h,p)$ et $S \in \mathrm{M}\ (h,q)$. E étant la matrice des thèmes d'entrée et S des thèmes de sortie :

$$M = [E \mid S]$$

Le mécanisme associé à A est donc un moyen de calculer un état de sortie S en fonction d'un état d'entrée E. Si les thèmes sont tous réels, ce mécanisme est une fonction f :

$$\mathrm{M}\ (\mathrm{h,p}) \xrightarrow{f} \mathrm{M}\ (\mathrm{h,q})$$

qui associe à une matrice d'entrée E, une matrice de sortie $S = f(E)$.

Conclusion

Nous avons construit progressivement à partir de « l'espace vide » les structures mathématiques permettant de modéliser l'espace géographique comme un espace-temps-matière non pas de manière absolue mais toujours relatif à la notion d'observation, nous avons été amené à définir la notion d'objet géographique comme résultant d'un processus d'identification qui permet de relier un ensemble de « grains matériels » à une représentation cognitive, l'objet, mais aussi à sa fonction à travers un système spatial ou géosystème.

Il reste encore bien des concepts à formaliser pour compléter ce travail. Par exemple, nous n'avons pas détaillé ici le mécanisme d'un géosystème à travers la formalisation de la décomposition duale de ses objets et ses activités, à travers aussi ses contraintes spatiales internes et externes. Nous n'avons pas beaucoup détaillé la modélisation du temps, ni la modélisation des différents types de matière et la typologie des thèmes en fonction des opérations que l'on est autorisé à leur appliquer.

Notes

1 - le terme dimension n'est pas pris ici dans son sens algébrique, mais au sens de point de vue descriptif.

2 - Il serait tentant de représenter le cadre spatio-temporel par l'espace euclidien 3^4 où chaque point P d'espace-temps serait représenté par un quadruplet (x_p, y_p, z_p, t_p) de nombres réels mais, contrairement à la théorie de la relativité, ici la quatrième coordonnée, le temps, ne peut s'exprimer dans la même unité que les trois premières qui sont des unités de longueur. De ce fait la distance spatio-temporelle entre deux points n'aurait pas de sens physique dans cet espace.