

Des fractales pour des villes résilientes et économes : enjeux théoriques et mathématiques

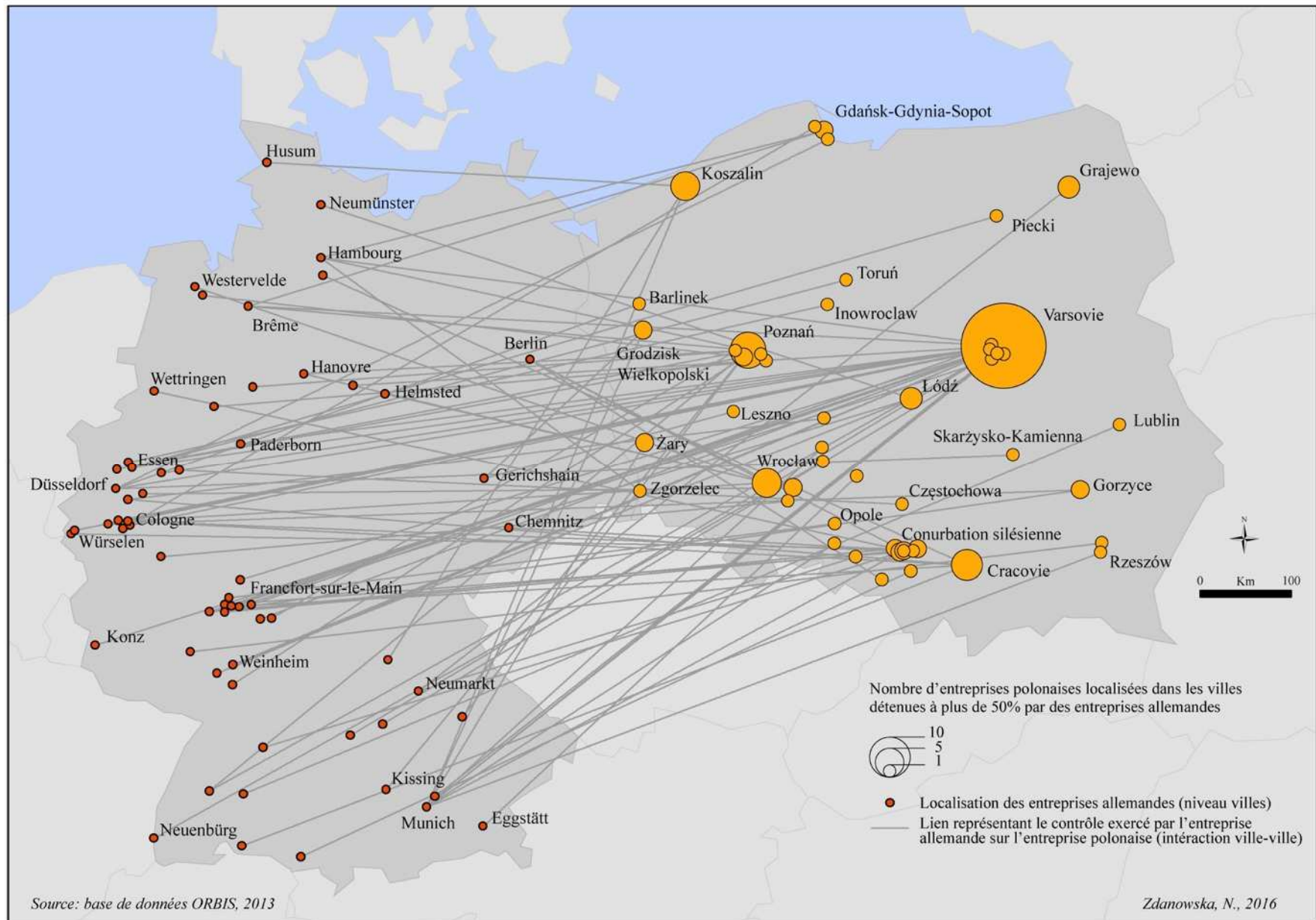
Olivier Bonin – LVMT (UMR T 9403 IFSTTAR, ENPC, UPEM)

Pierre Frankhauser – TheMA (UMR 6049 FC, CNRS)

Etude des villes en géographie quantitative

- Calcul d'indicateurs liés à la population, au bâti et aux réseaux, rendus possibles par les données géographiques et statistiques
- Analyse spatiale: voisinages, réseaux, distances
- Données de fonctionnement de la ville (big data)

- Approche nettement réductionniste: caractérisation des villes par un petit nombre d'indicateurs, et recherche de lois macroscopiques reliant ces indicateurs (par exemple loi rang-taille)
- Peu d'approches directes de la question de la forme (manière de remplir l'espace)

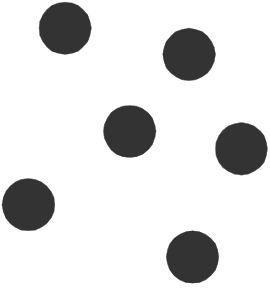
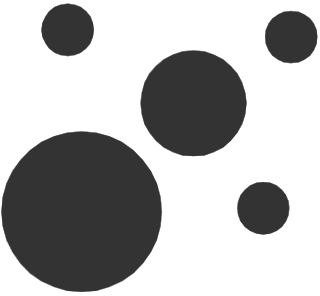



Liens de contrôle de plus de 50% du capital des entreprises polonaises par les entreprises allemandes situées dans les agglomérations en 2013. Zdanowska, 2016

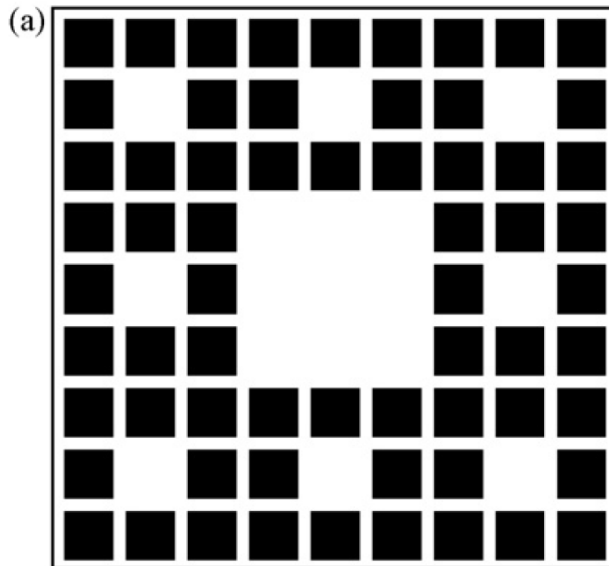
Indicateurs et formes

Approche par **indicateurs**: Nombre, Densité, Distance

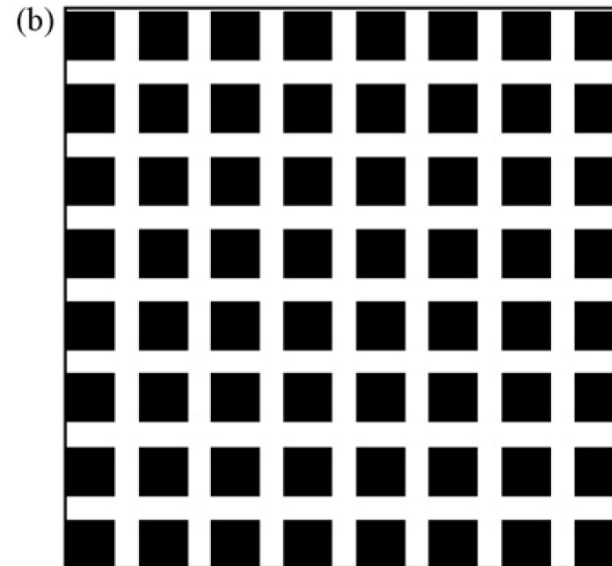
Approche
par formes:
**structure
spatiale**

Semi des agrégats	Hiérarchie des agrégats	Formes des agrégats
		

Dépasser les limites de la densité



même nombre d'éléments
Répartition fractale
 $D = 1,89$



– même surface de référence
– répartition uniforme
– $D = 2$

– même densité –

Les fractales pour les villes

- Souvent, les fractales sont utilisées comme des auxiliaires dans les analyses suivant la même approche que précédemment: calcul d'un indicateur, la dimension fractale
- La **géométrie fractale** disparaît derrière des indicateurs scalaires
- Grand intérêt pour la **classification des tissus urbains**; intérêt moindre pour révéler l'organisation interne des villes: on perd ici aussi la notion de forme

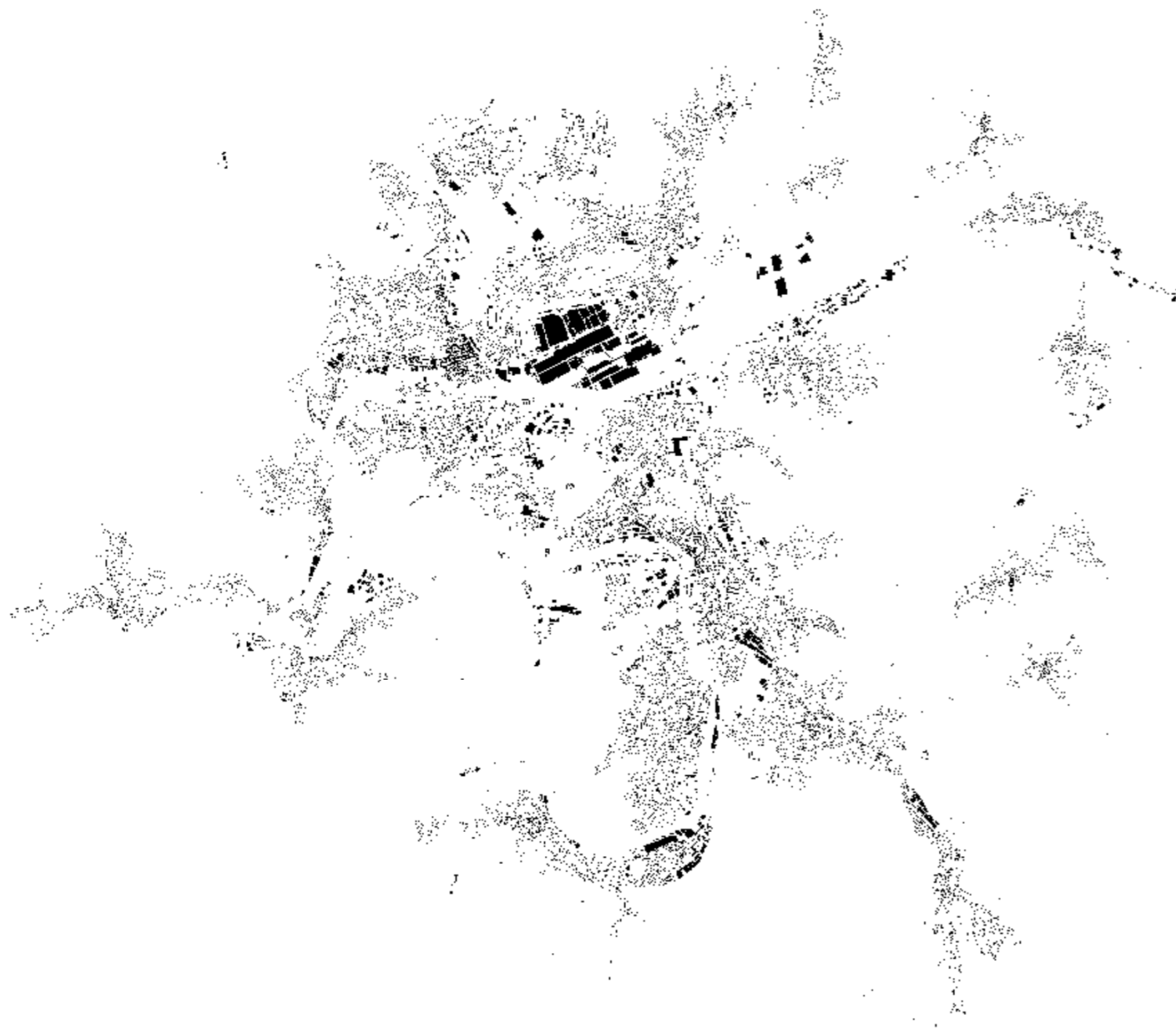


Lille

$$D_{\text{box}} = 1,65$$

Montbéliard

$D_{\text{box}} = 1,56$



Modèles urbains archétypaux

- Idée générale derrière une partie des approches de géographie quantitative: modèles archétypaux « purs » qui sont déformés lors de leur inscription spatiale dans le territoire
- Modèles utilisant des primitives simples mono-échelle: points, lignes et surfaces, et des figures mathématiques élémentaires, principalement le cercle, le carré et le rectangle
- De Von Thünen à Alonso-Mills-Muth en passant par Burgess
- Modèle gravitaire
- 1^{ère} loi de la géographie de Tobler
- ...

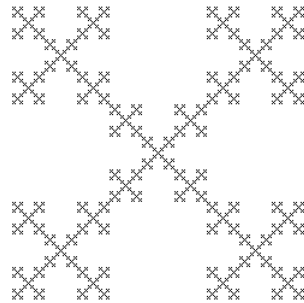
Les fractales comme des archétypes géométriques multi-échelle

- Plusieurs fractales différentes peuvent avoir la même dimension: la forme ne se résume pas à une dimension?
- La forme et le contour de la forme peuvent avoir de dimensions très différentes
- En restant dans le même concept philosophique de forme (Platon, Aristote, Kant), les fractales offrent des formes générales pour des construction multi-échelles

Tapis de Sierpinski et poussière de Fournier

un seul agrégat

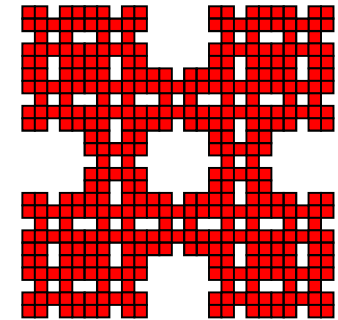
$$D_s = D_{b-tot} = D_{b-clust} = 1,46$$



un seul agrégat

$$D_s = D_{b-tot} = 1,72$$

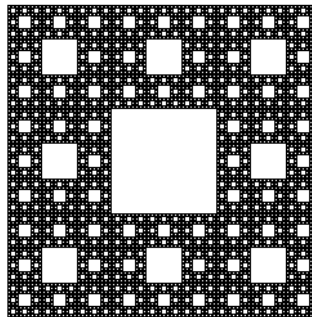
$$D_{b-ext} = 1.21 < D_{b-tot}$$



un seul agrégat

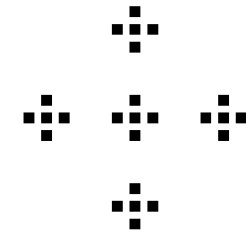
$$D_s = D_{b-tot} = 1,89$$

$$D_{b-ext} = 1 < D_{b-tot}$$



hiérarchie d'agrégats

$$D_s = D_b = 1,00$$



D_s = dimension surface

D_b = dimension bordure

tot = externe

clust = cluster connecté

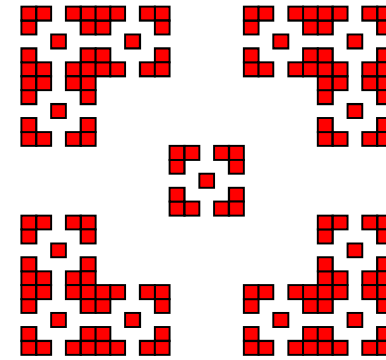
ext = extérieure

Tapis mixtes

Série d'agrégats

$$D_{surf/tot} = D_{bord/tot} = 1,59$$

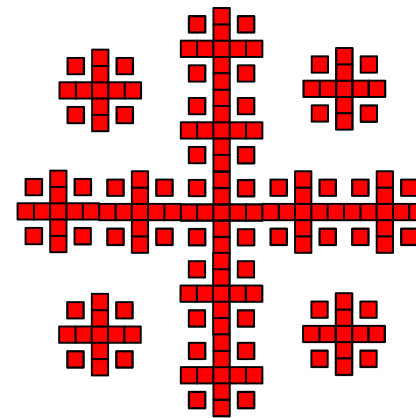
$$D_{surf/agr} = D_{bord/agr} = 1,54$$



Série d'agrégats

$$D_{surf/tot} = D_{bord/tot} = 1,59$$

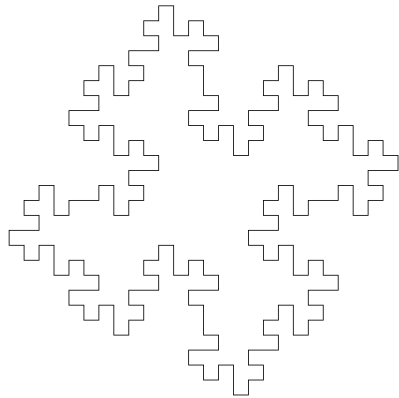
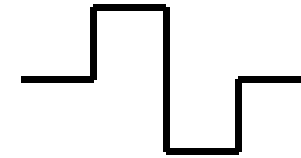
$$D_{surf/agr} = D_{bord/agr} = 1,36$$



Tout n'est pas nécessairement fractal!

Le téragone: surface non fractale, mais de bordure fractale

le générateur



bordure du téragone

$$D_b = 1,5$$



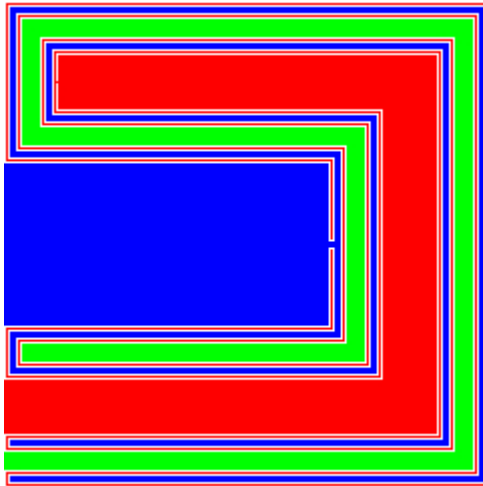
et la surface

$$D_s = 2$$

Contraintes du développement durable sur les villes

- Injonctions parfois contradictoires
 - Densité (impact sur les TC mais aussi sur les îlots de chaleur)
 - Mixité d'usage
 - production locale d'énergie et développement des réseaux de chaleur
 - réduction des déchets et UIOM
 - compacité et trames vertes et bleues
 - nature en ville, agriculture urbaine
 - ...
- Les fonctions consomment de l'espace: arbitrage nécessaire, articulation, régulation, planification
- Les fractales sont des primitives géométriques archétypales qui permettent d'aider à concilier certaines contraintes

Multiplicité des usages du sol



https://fr.wikipedia.org/wiki/Lacs_de_Wada

Un modèle fractal permet de faire se rencontrer trois zones différentes en tout point de la frontière

Ce n'est pas un principe d'optimisation, mais une caractéristique géométrique du modèle!

Lacs de Wada :

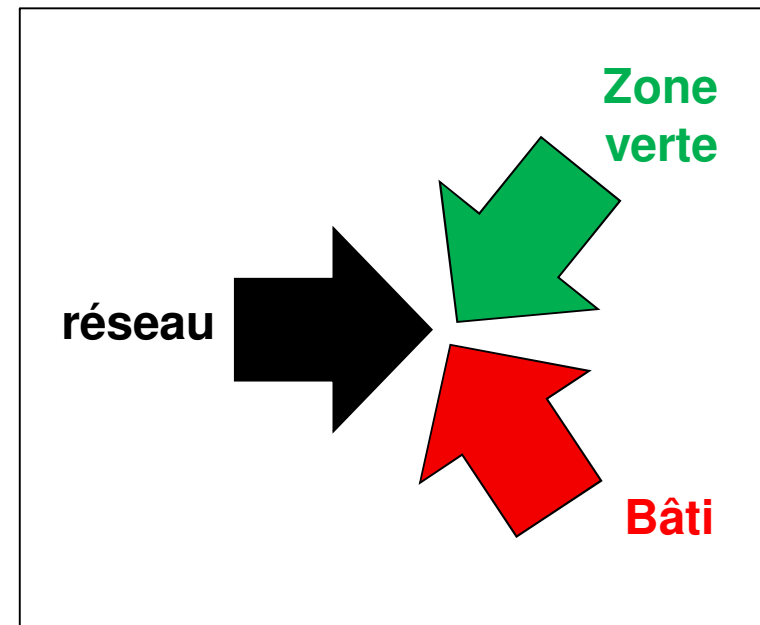
trois ensembles (zones en couleur)

☐ ouverts

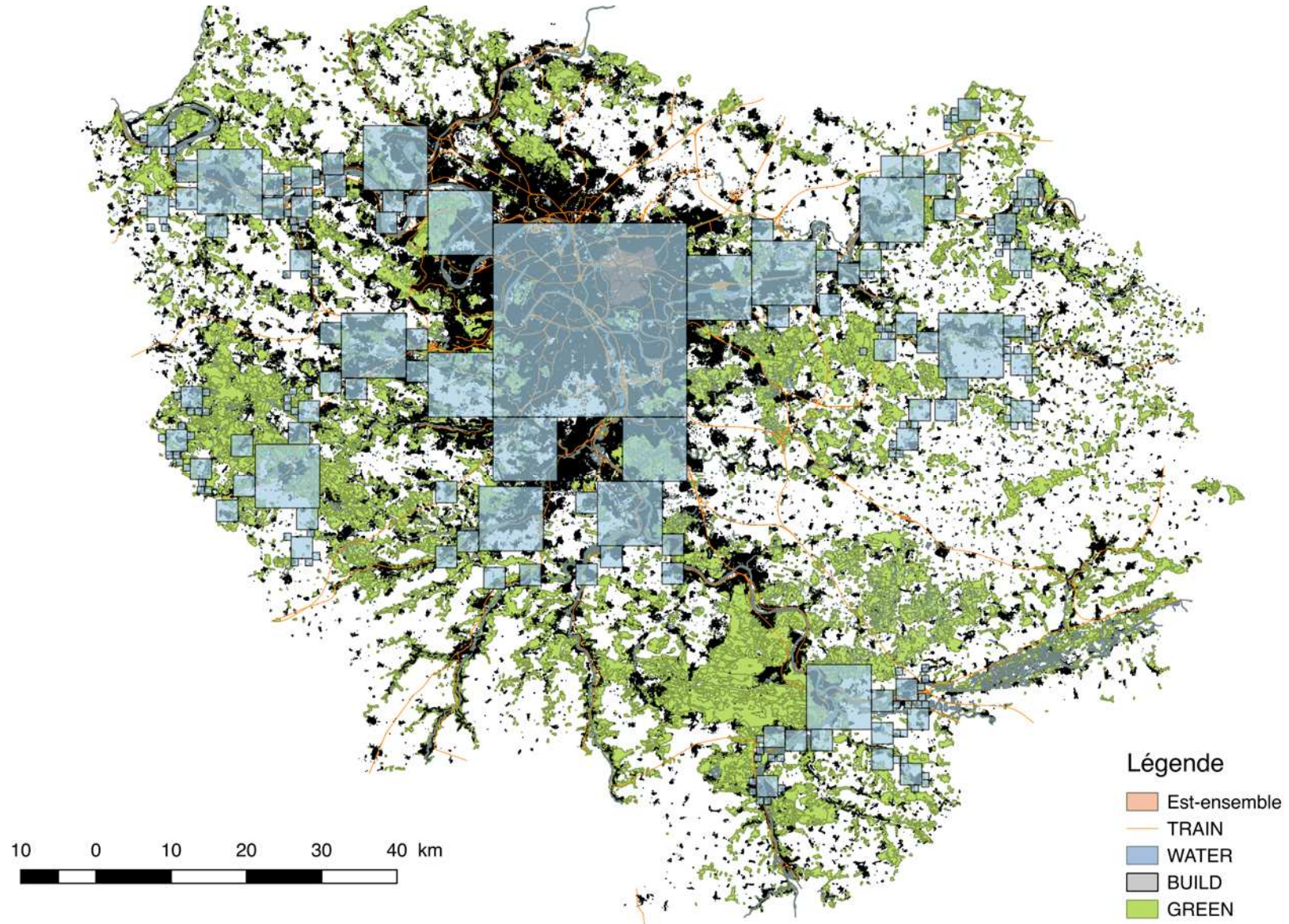
☐ connexes

☐ disjoints du plan

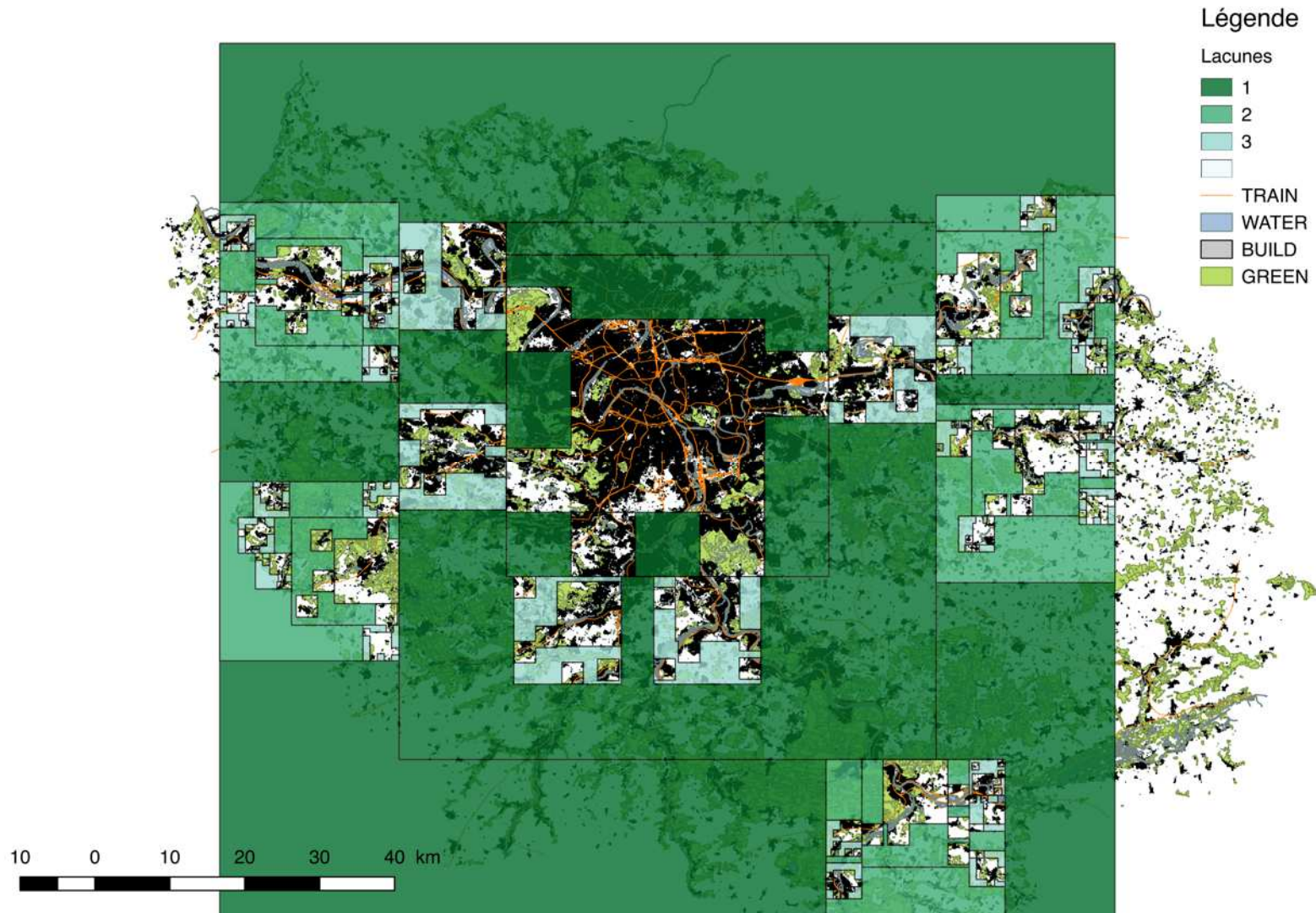
☞ partagent tous les trois la même frontière.



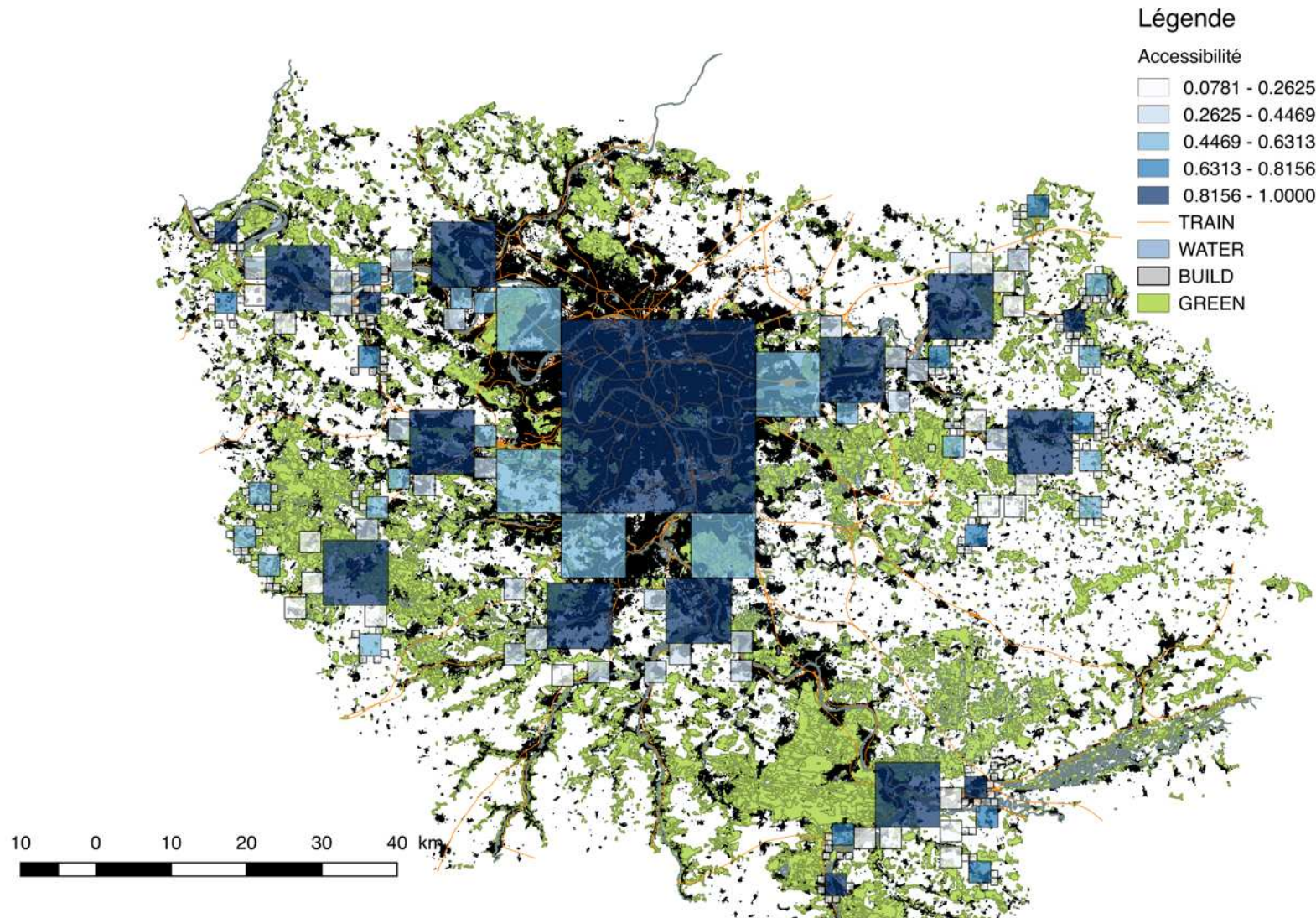
Analyse de l'Ile-de-France: centres



IDF: lacunes



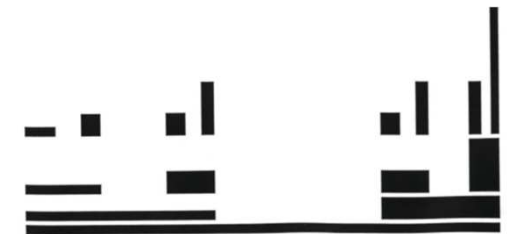
IDF: accessibilité aux aménités



Les fractales comme support de phénomènes à travers les échelles

- Tout n'est pas nécessairement fractal, mais multiéchelle: les objectifs de répartition spatiale des population, des emplois, des services, des espaces verts, de l'agriculture, etc. s'inscrivent différentes échelles (soit échelles de décision publique, soit échelle fonctionnelle)
- Les phénomènes sont portés par le bâti, les réseaux et les équipements (espace fortement non isotrope)
- **Introduction de distributions (lois de probabilité) portées par les bâtiments et les réseaux, qui peuvent varier selon les échelles: multifractales**

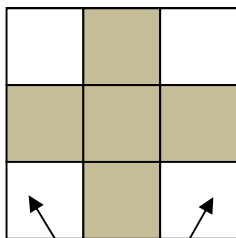
Les barres de Cantor



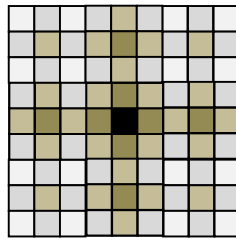
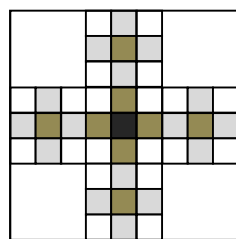
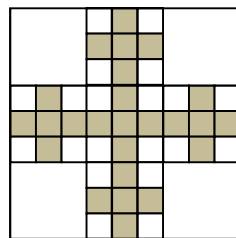
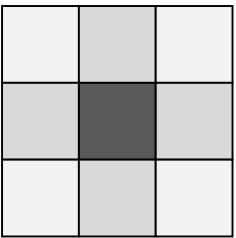
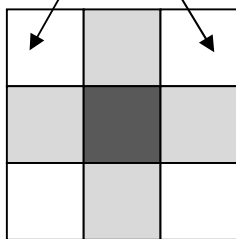
Facteurs de réduction	Pondération	type	nombre de générateurs
un	non <i>non normalisé</i>	monofractal	un
plusieurs	non <i>non normalisé</i>	multifractal non affine	un
un	oui, égal <i>normalisé</i>	monofractal	un
néant	oui, plusieurs <i>normalisé</i>	multifractal affine	un
plusieurs	oui, plusieurs <i>normalisé</i>	multifractal affine	deux

Problèmes mathématiques posés par les géographes

- Peut-on tester la fractalité d'une forme?
- Comment estimer une distribution multifractale portée par un support (mono/multi) fractal?
- Comment estimer / analyser des multifractales multivariées (par exemple population, emplois, commerces)?



poids zéro



monofractale

multifractale par
pondération
lacunaire

multifractale par
pondération
non-lacunaire

Difficile à estimer!

Multifractale avec plusieurs facteurs de réduction et pondération

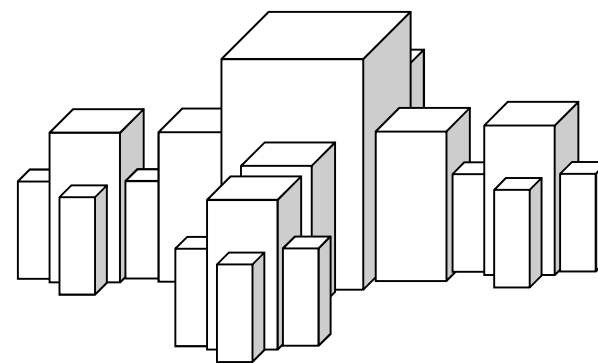
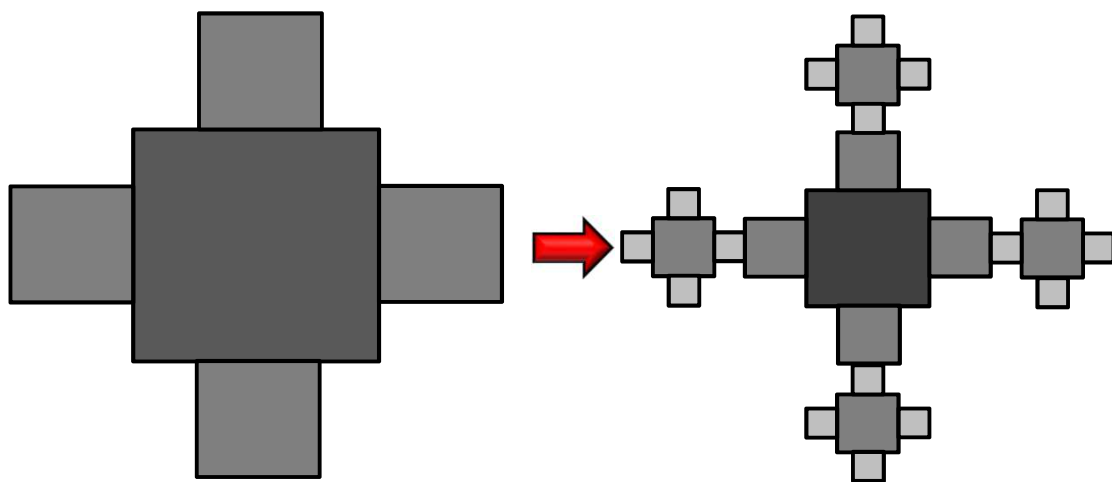


Illustration 3D