La seconde loi (cachée) de la géographie ?

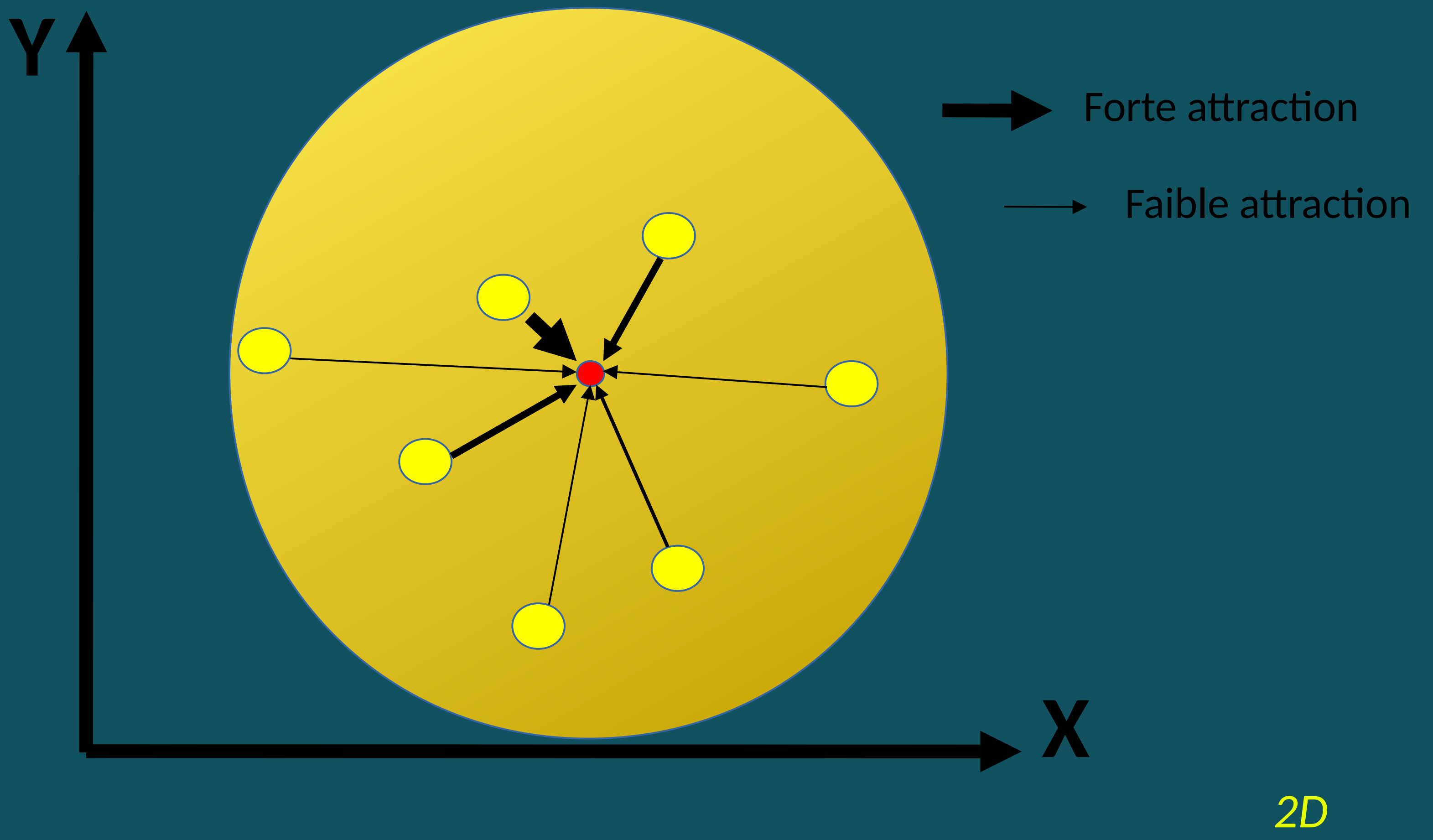
JOSSELIN Didier, UMR ESPACE
CILIGOT-TRAVAIN Marc, laboratoire de Mathématiques d'Avignon
ROJAS-MORA Julio, Universidad Austral de Chile
GOURION Daniel, laboratoire de Mathématiques d'Avignon

ThéoQuant'2017, Besançon, 17-19 mai 2017

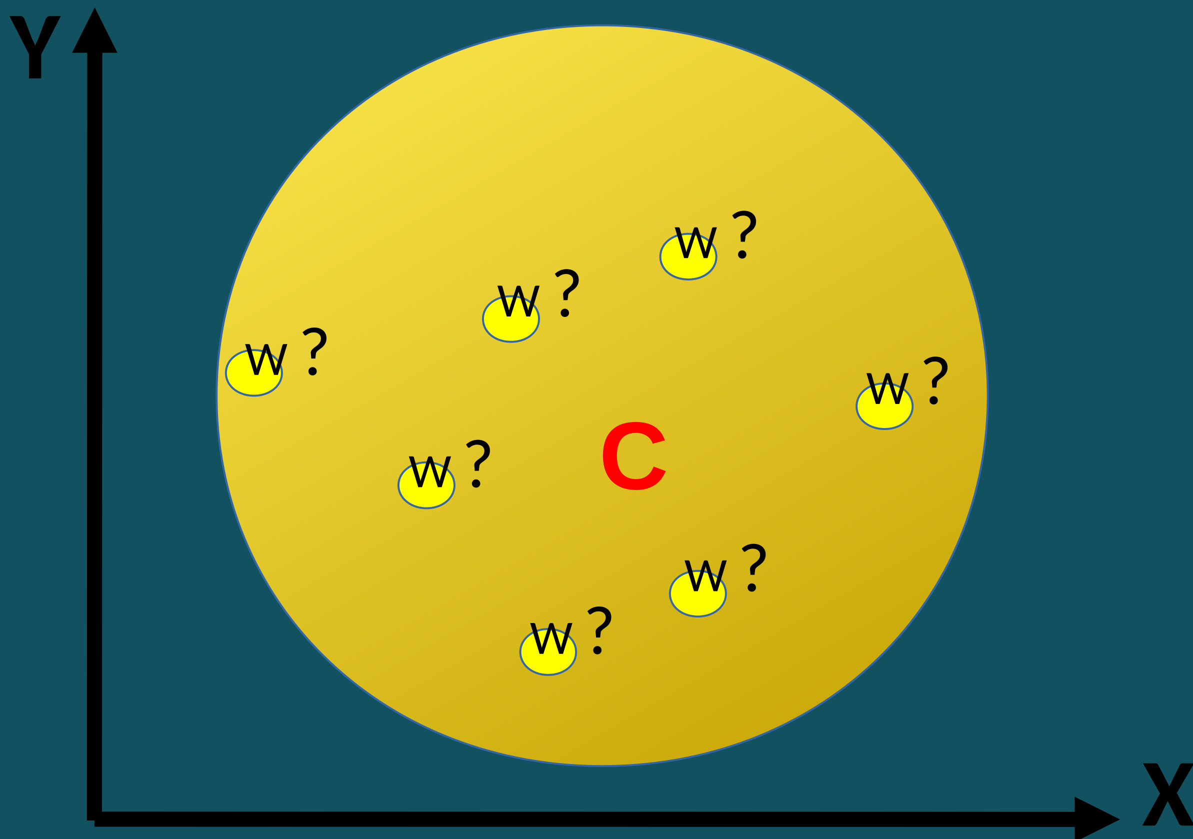
Première loi de la géographie de Tobbler (1970)

Tous les objets géographiques sont en relation dans l'espace mais que ceux qui sont plus proches le sont davantage

Analogie gravitaire de la loi de Tobbler pour un centre et sa périphérie

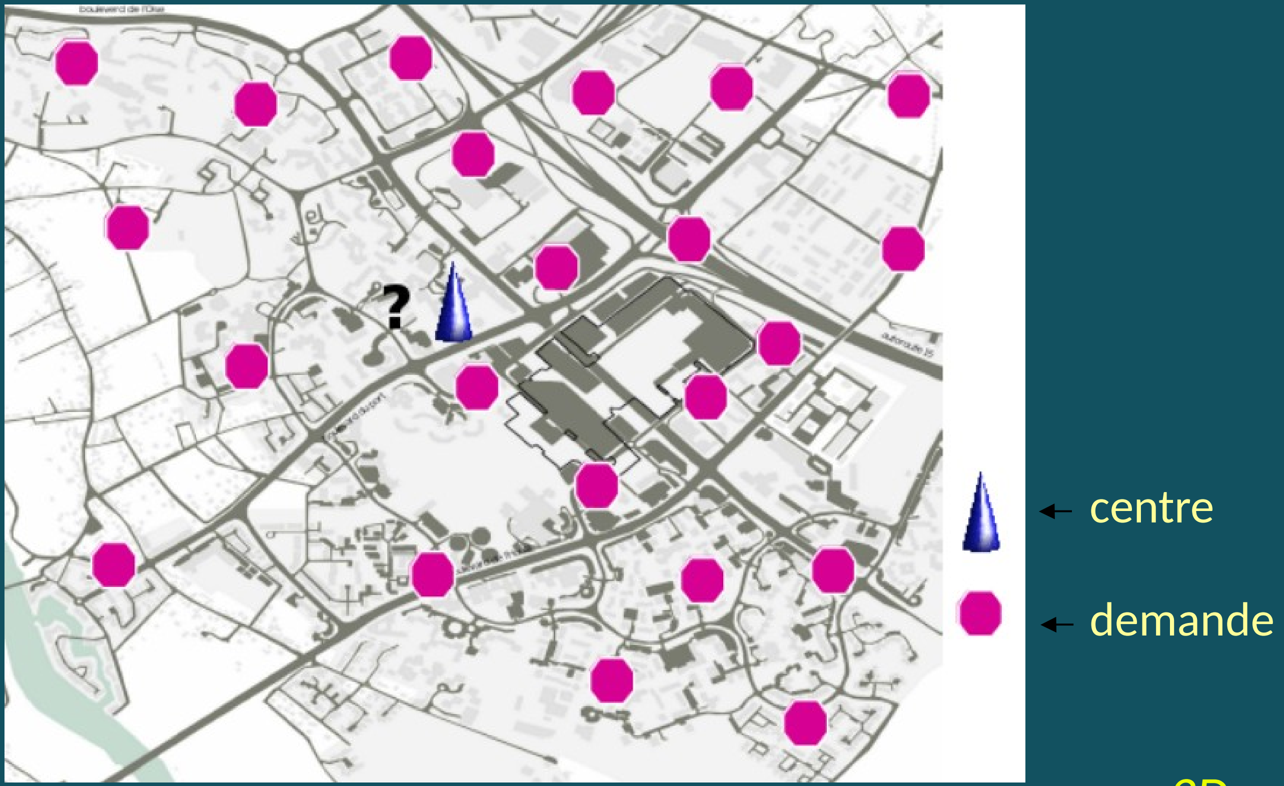


Inversion d'analyse : quelle influence individuelle des points sur le centre ?



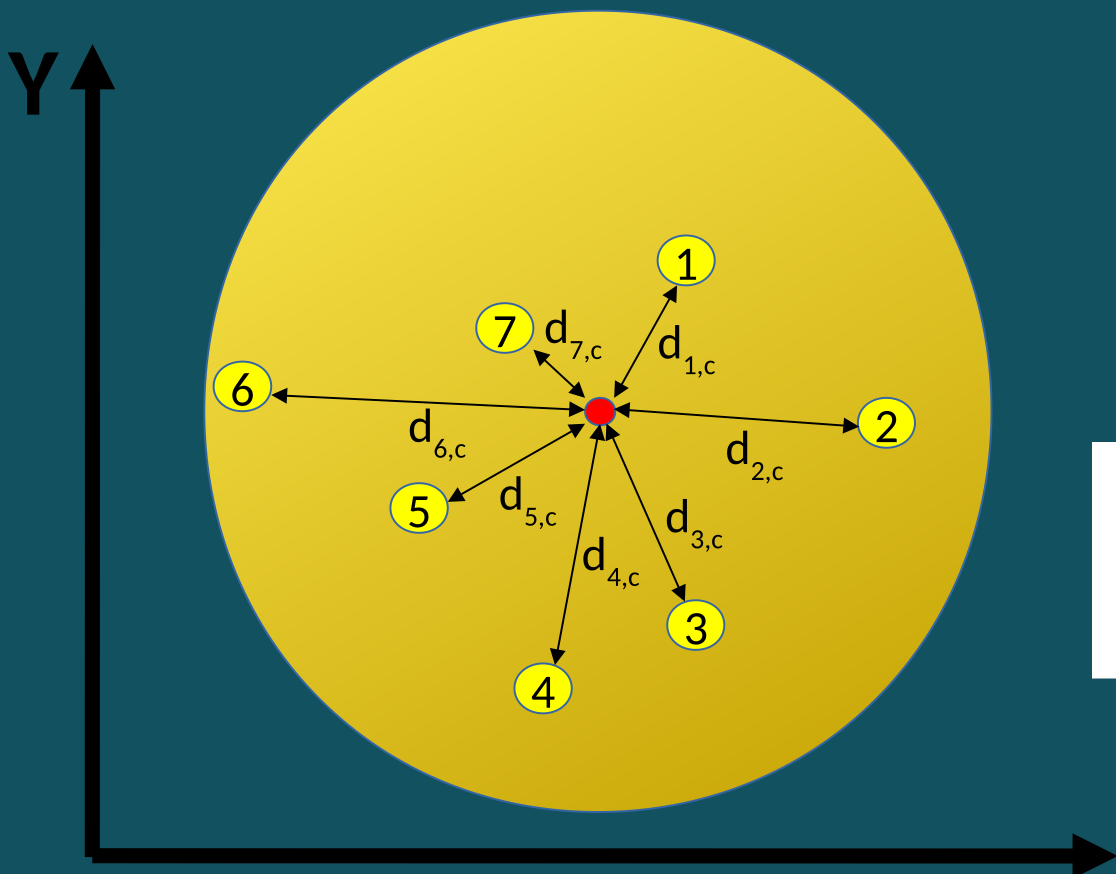
2D

Localisation optimale d'un centre en fonction d'un ensemble de demandes



2D

Localisation optimale d'un centre : minimisation de la distance de Minkowski (norme L_p)

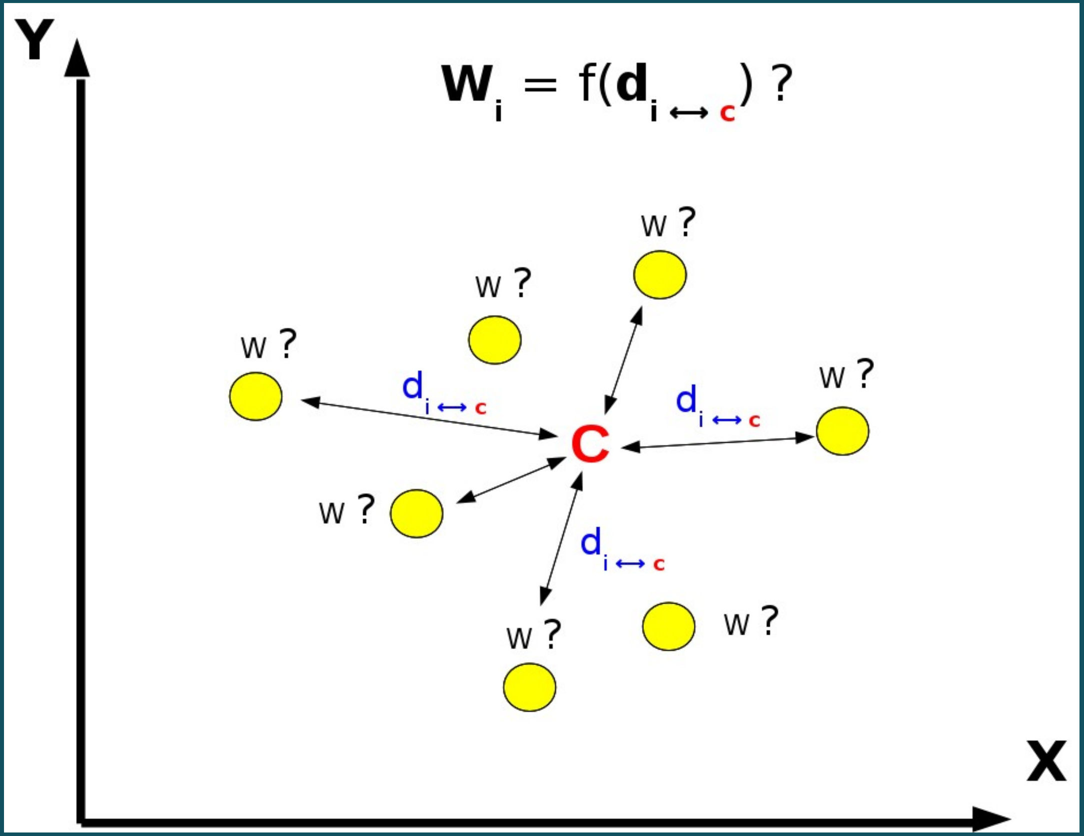


$d_{i,c}$ = distance ***entre i*** et ***c***

$$c^* = min\left(\sum d_{ic}^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

2D

Quelle est la relation entre l'influence et la distance au centre ?

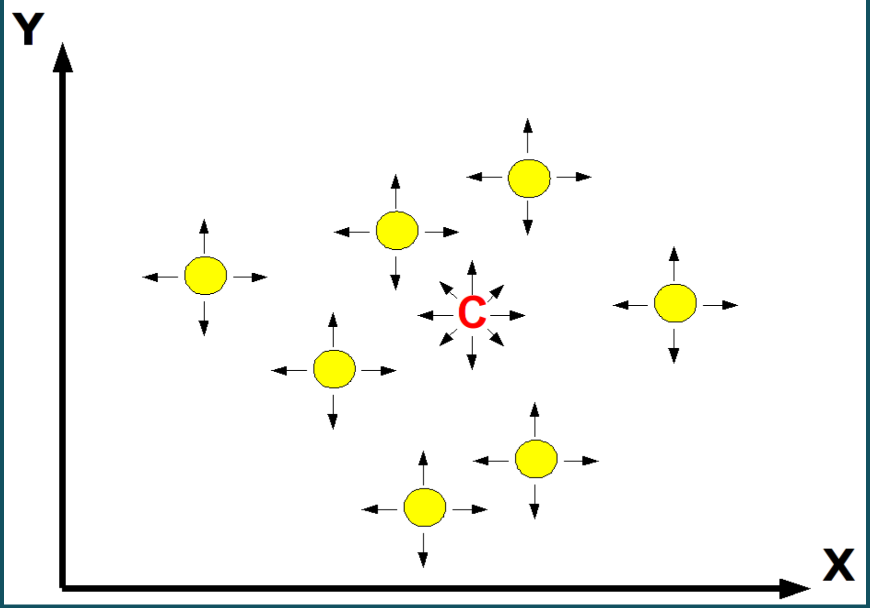


d_{ii} =
distance
entre i et ***c***

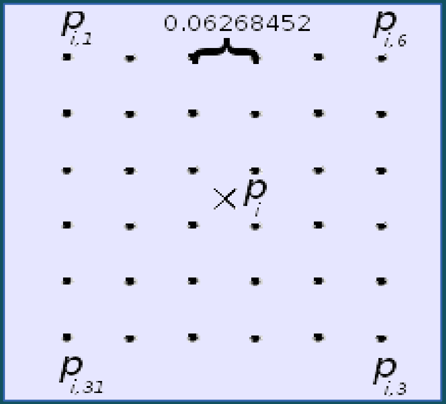
Cas théorique d'un espace isotrope

2D

Analyse de sensibilité



$$w_i = \frac{\frac{1}{n}\sum_k \frac{\delta_{c\to c'}}{\delta_{i\to i'}}}{\sum_i \left(\frac{1}{n}\sum_k \frac{\delta_{c\to c'}}{\delta_{i\to i'}}\right)}$$



n points

k directions

i : un point de demande

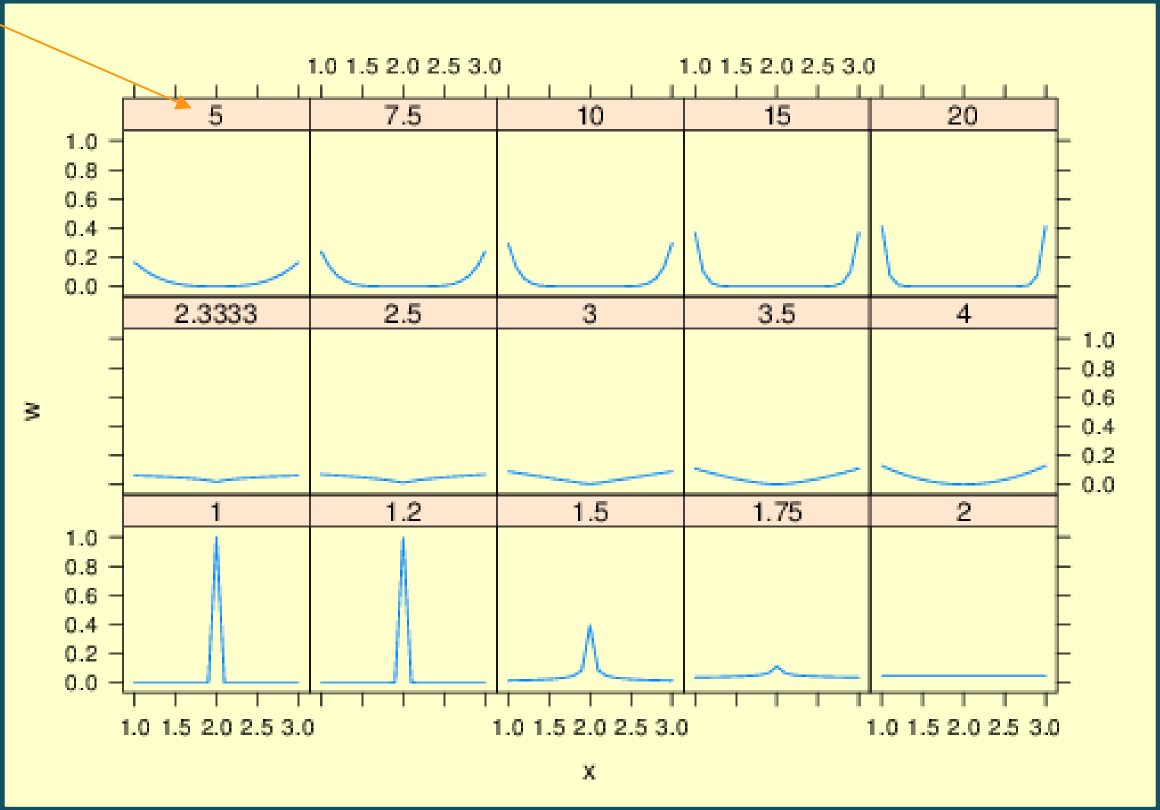
c : le centre

2D

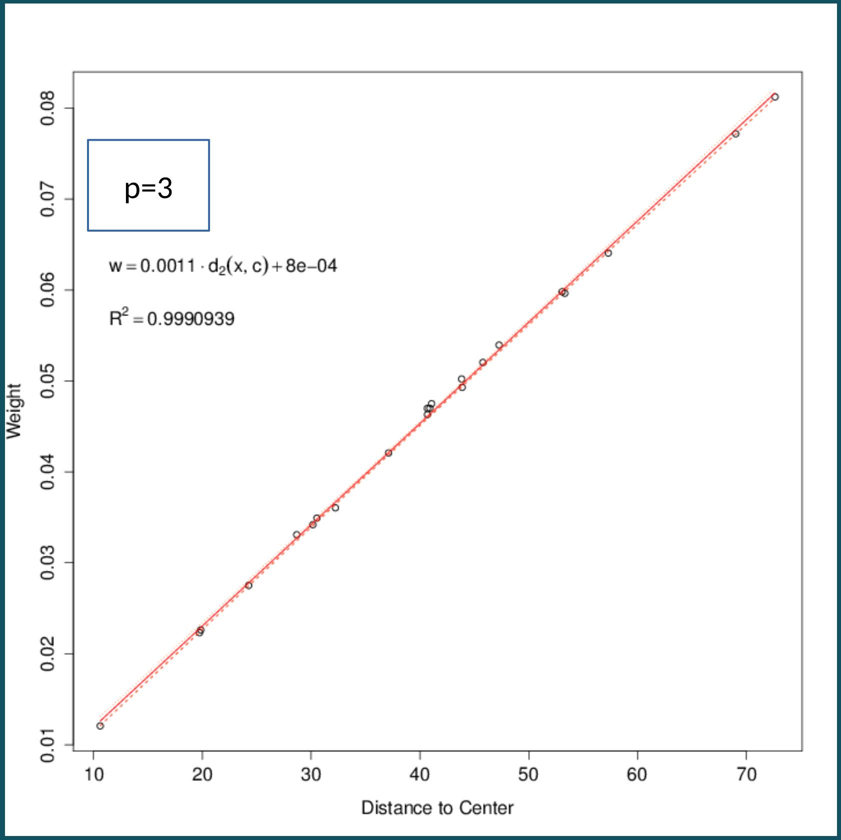
Relation entre influence w_i, distance d_{ic} et norme L_p

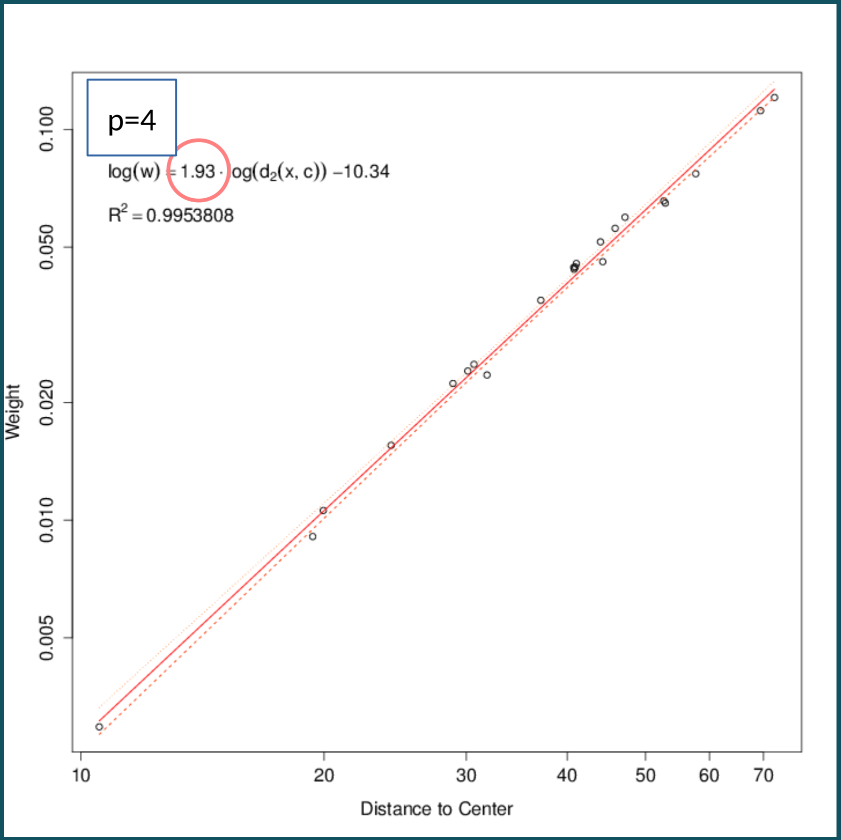
norme L_p

1D
(1 série de données)



Relation entre influence w_i et distance d_{ic} selon différentes valeurs de *p*



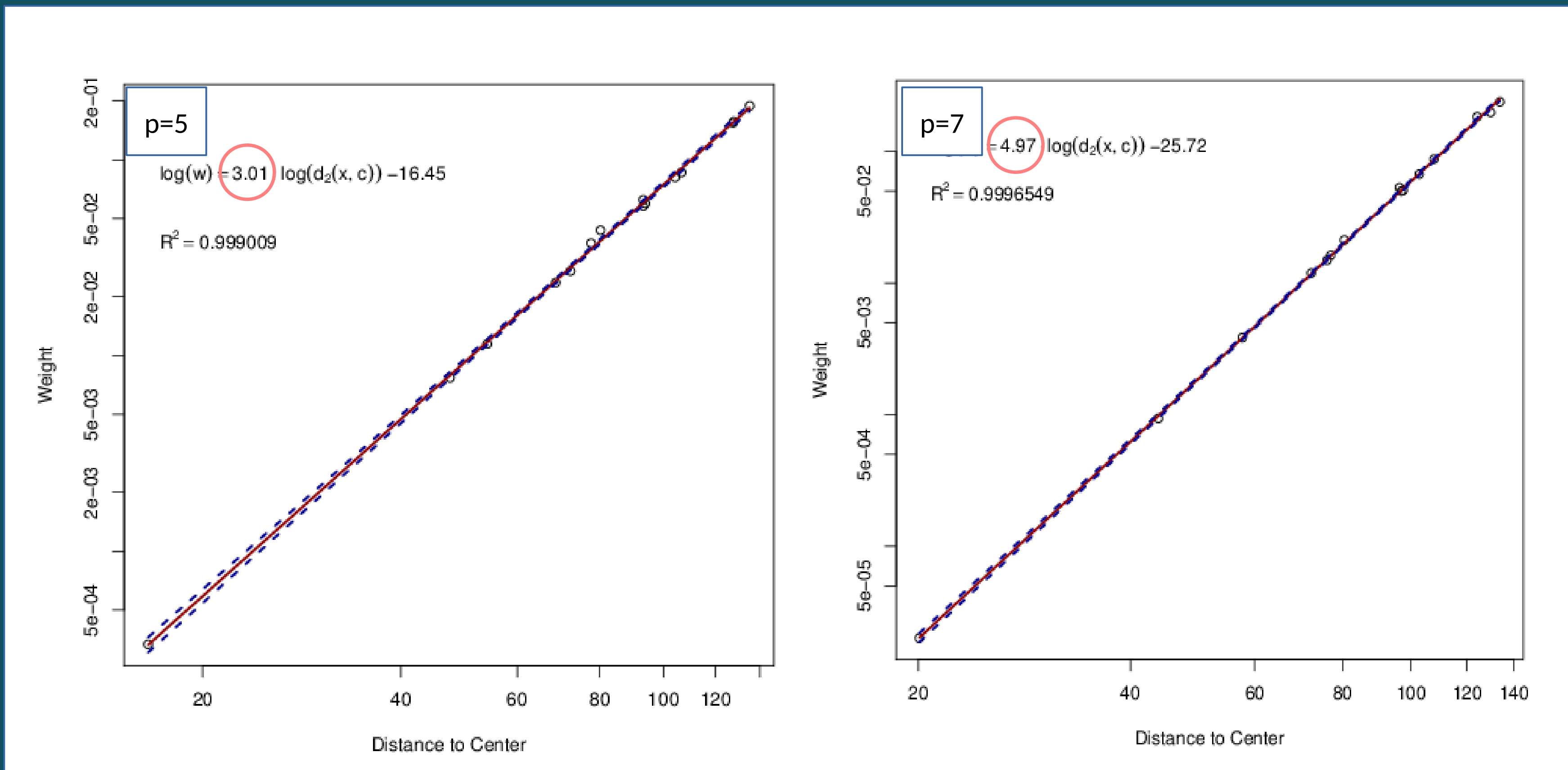


log=ln

La distance euclidienne est considérée dans les calculs

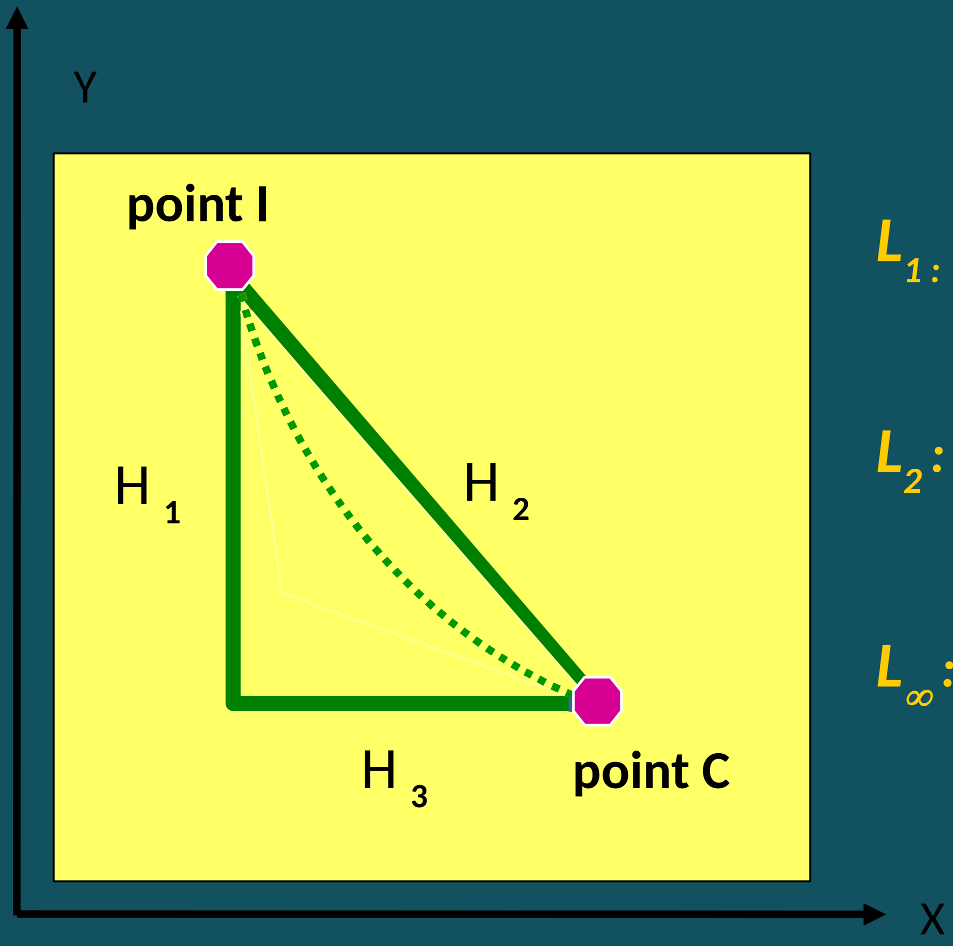
2D

Relation entre influence w_i et distance d_{ic} selon différentes valeurs de *p*



log=ln La distance euclidienne est considérée dans les calculs *2D*

Diverses distances



L_{1} : distance de Manhattan ***(p'=1)***

$$d_{ic} = H_1 + H_3$$

L_2 : distance Euclidienne ***(p'=2)***

$$d_{ic} = (H_1^2 + H_3^2)^{1/2} = H_2$$

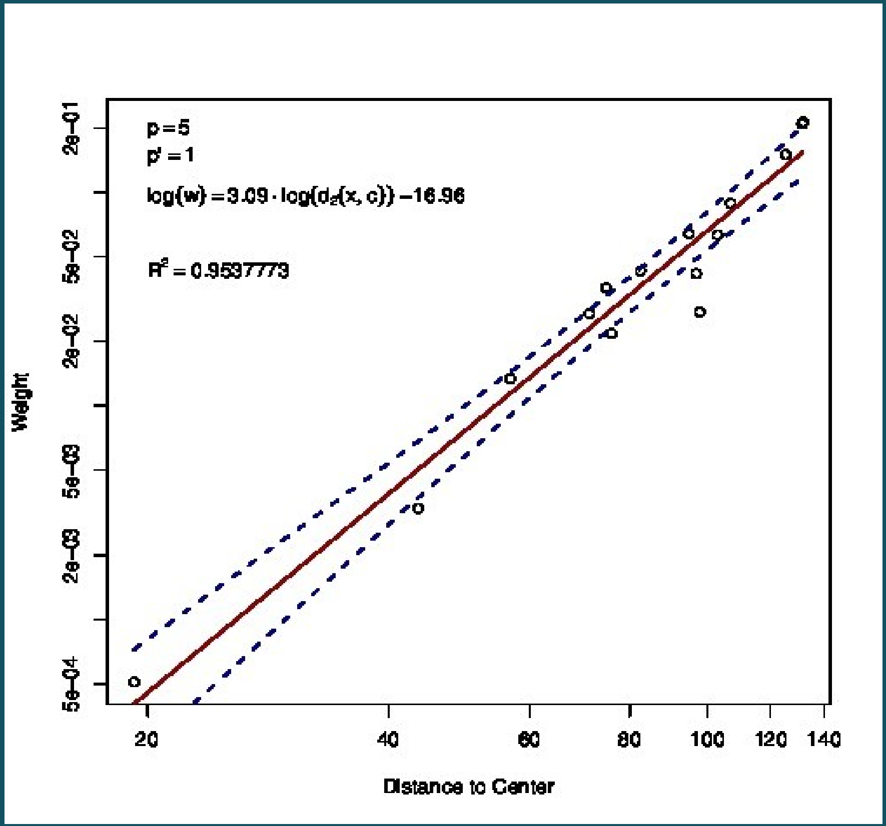
L_∞ : distance des points extrêmes ***(p'→∞)***

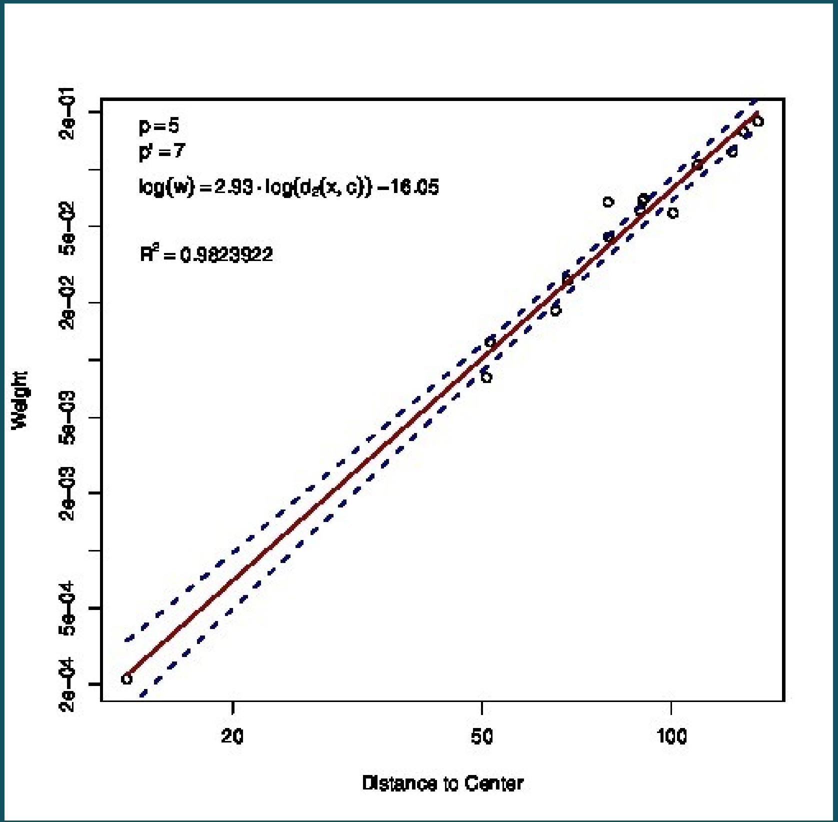
$$d_{ic} = \max\{H_{1;} H_3\} = H_1$$

On peut intégrer une distance p'

2D

Relation entre influence w_i et distance d_{ic} selon différentes valeurs de *p et p'*





log=ln

Distance de Manhattan

Minimax

2D

Généralisation

$$ln(w_i) = (p-2)ln(d_{ic}) + r$$

$$w_i = \frac{d_{ic}^{(p-2)}}{e^{-r}}$$

p de la norme L_p

r est un reste

La distance euclidienne est considérée dans les calculs

1D

Une relation fractale structurelle

$$f^{'}(x) = p|x|^{p-2}x$$

x : localisation

Relation avec la distance et p

$$w_i = \frac{\delta x_c}{\delta x_i} = \frac{|d_{ic}|^{p-2}}{\sum_{i=1}^{n} |d_{ic}|^{p-2}}$$

Constante structurelle du nuage de points

La distance euclidienne est considérée dans les calculs

1D

Calcul du reste *r*

$$r = \frac{ln(w_i)}{(p-2)ln(d_{ic})} = \frac{1}{p-2} log_{d_{ic}}(w_i)$$

via i

$$r = -ln(\sum_{i=1}^{n} |d_{ic}|^{p-2})$$

Par la structure topologique
du semis de points de demande

La distance euclidienne est considérée dans les calculs

1D

Cas avec *p=1*

$$w_i = \frac{1}{d_{ic}e^{-r}}$$

$$r = -\frac{1}{2}log_{d_{ic}}(w_i)$$

$$r = -ln\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_{ic}}$$

médiane

La distance euclidienne est considérée dans les calculs

1D

Cas avec *p=2*

$$w_i = \frac{1}{e^{-r}}$$

$$r = -ln \sum_{i=1}^{n} 1 = -ln(n)$$

moyenne

La distance euclidienne est considérée dans les calculs *1D*

Cas avec *p=3*

$$w_i = \frac{d_{ic}}{e^{-r}}$$

$$r = log_{d_{ic}}(w_i)$$

$$r = -ln \sum_{i=1}^{n} d_{ic}$$

?

La distance euclidienne est considérée dans les calculs

1D

Cas avec *p=4*

$$w_i = \frac{d_{ic}^2}{e^{-r}}$$

$$r = \frac{1}{2} log_{d_{ic}}(w_i)$$

$$r = -ln \sum_{i=1}^{n} d_{ic}^2$$

?

La distance euclidienne est considérée dans les calculs

1D

Cas avec *p=1,5*

$$w_i = \frac{d_{ic}^{-0.5}}{e^{-r}} = \frac{1}{e^{-r}\sqrt{d_{ic}}}$$

$$r = 2.log_{d_{ic}}(w_i)$$

$$r = -ln\sum_{i=1}^{n} d_{ic}^{-\frac{3}{2}}$$

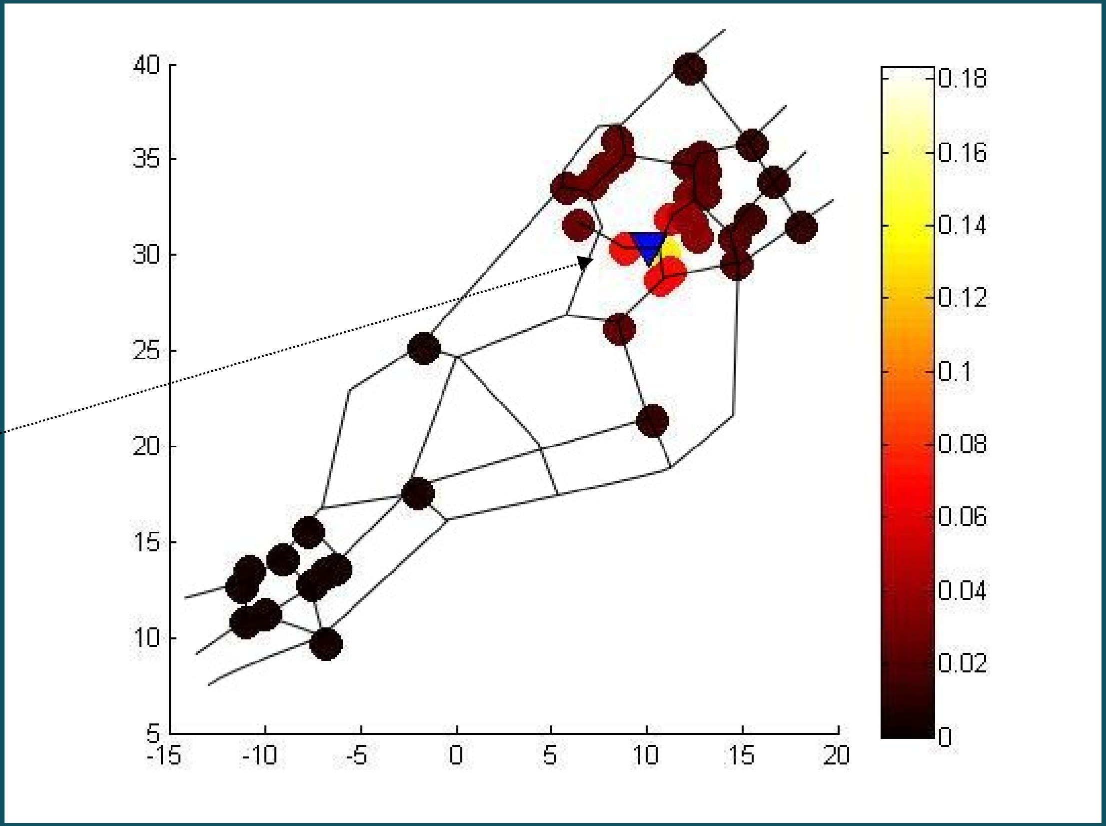
?

La distance euclidienne est considérée dans les calculs

1D

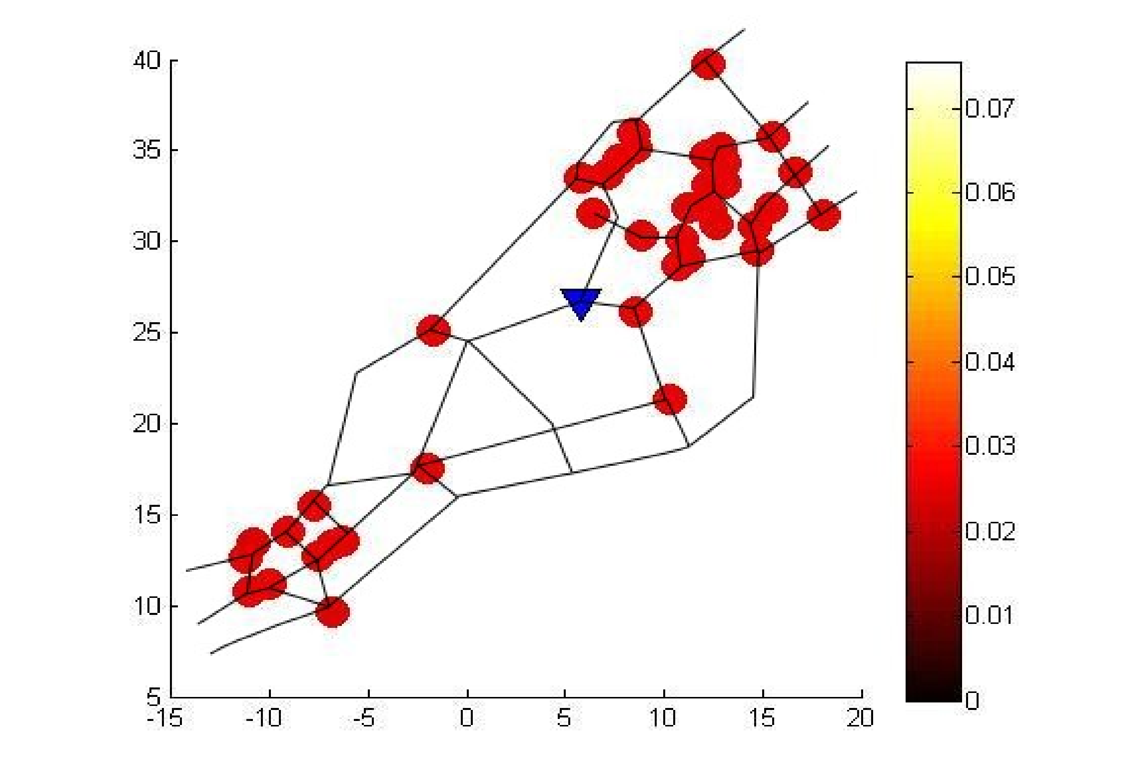
Exemple de cartographie des influences sur le centre sur un réseau (*p=1*)

Triangle bleu : centre



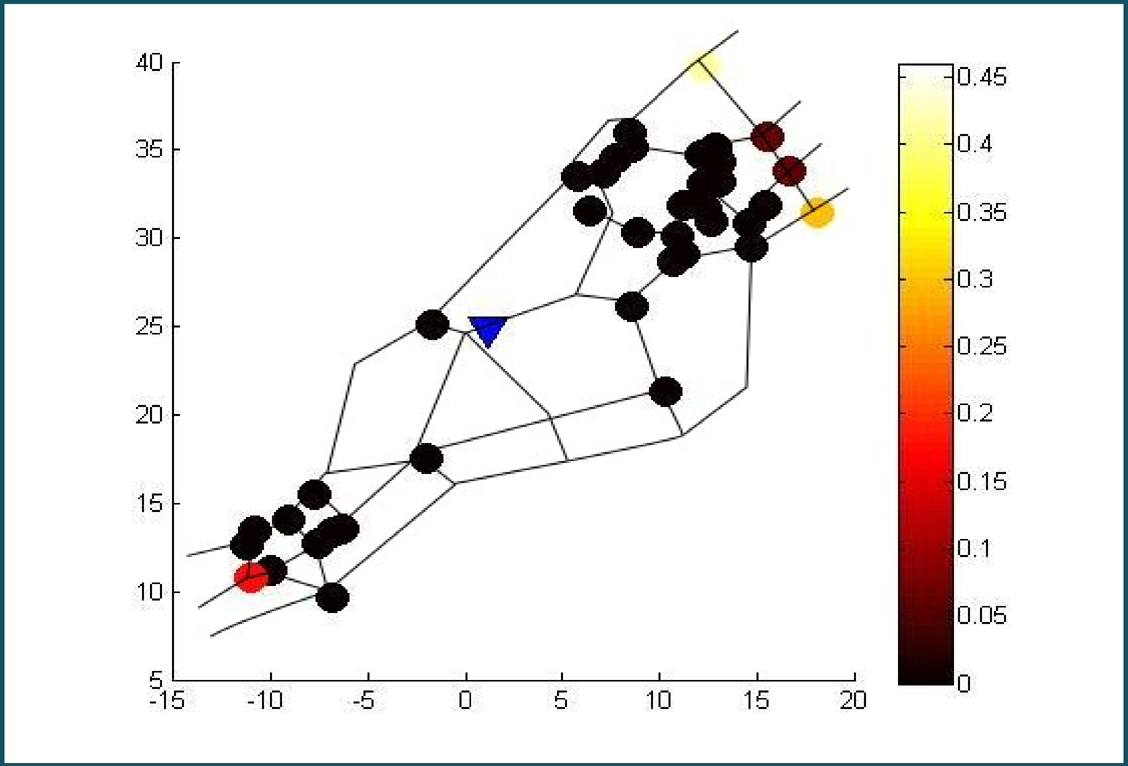
Plus d'influence

Exemple de cartographie des influences sur le centre sur un réseau (*p=2*)



p=2 ; barycentre ; égalité Illustration du concept *2D*

Exemple de cartographie des influences sur le centre sur un réseau ($p \to \infty$)



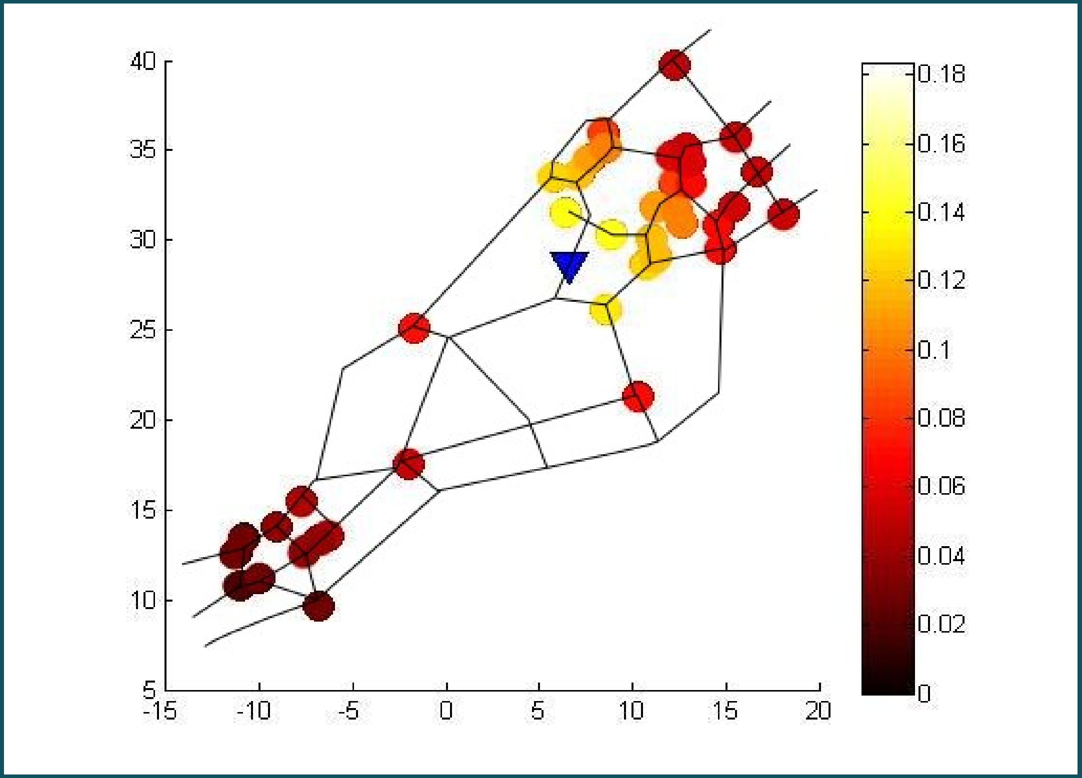
Plus d'influence

$p \to \infty$; minimax ; équité

Illustration du concept

2D

Exemple de cartographie des influences sur le centre sur un réseau (*p=1,5*)

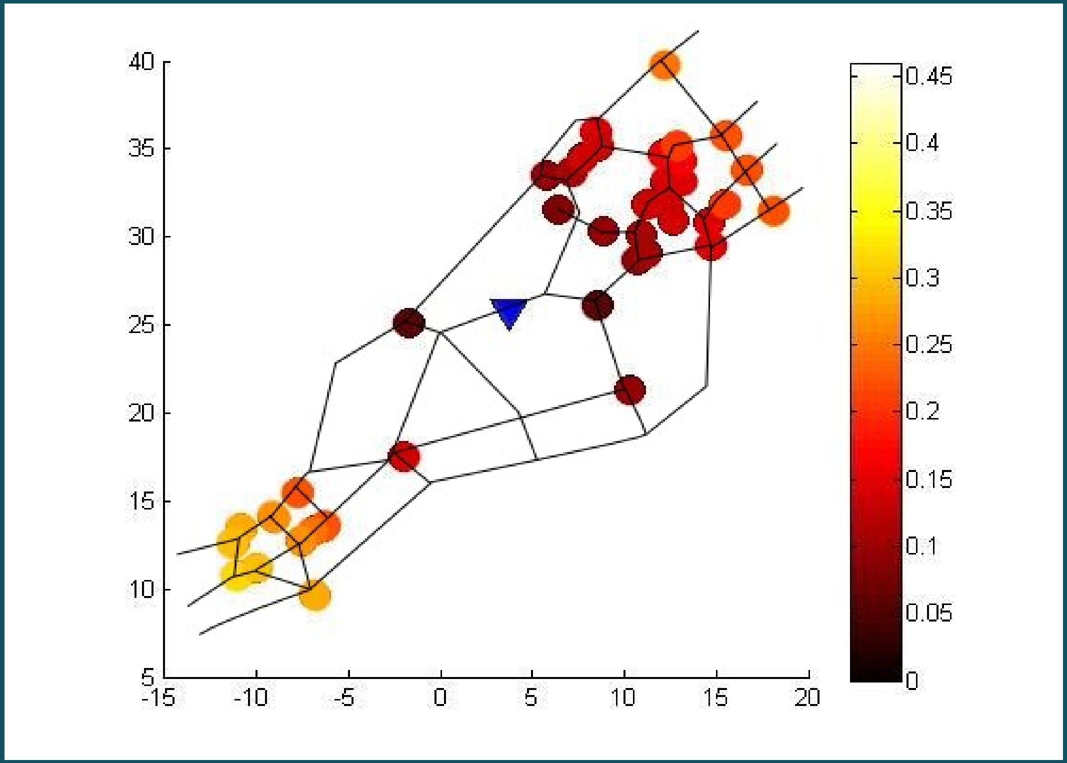


Plus d'influence

P=1,5 ; compromis efficacité/égalité

2D

Exemple de cartographie des influences sur le centre sur un réseau (*p=3*)



Plus d'influence

P=3 ; progressivité : compromis égalité/équité

2D

Conclusion

- Il existe une relation (log)linéaire entre l'influence d'un point de demande et sa distance au centre optimal quelle que soit la norme L_p
- On peut cartographier cette influence qui dépend de *p*
- La métrique, considérée comme continue avec *p*, peut permettre d'adapter l'objectif du centre à la planification
- *p* détermine la pente de la droite (dimension fractale : *p-2*)
- Dans le calcul de la constante *r*, la distance entre *i* et *c* constitue la base du *log* du poids w_i
- Ces éléments forment-il une *loi cachée* relativisant la loi de Tobbler ou toute mesure basée sur la distance, pour le cas d'un centre optimal en interaction avec un semis de demandes ?

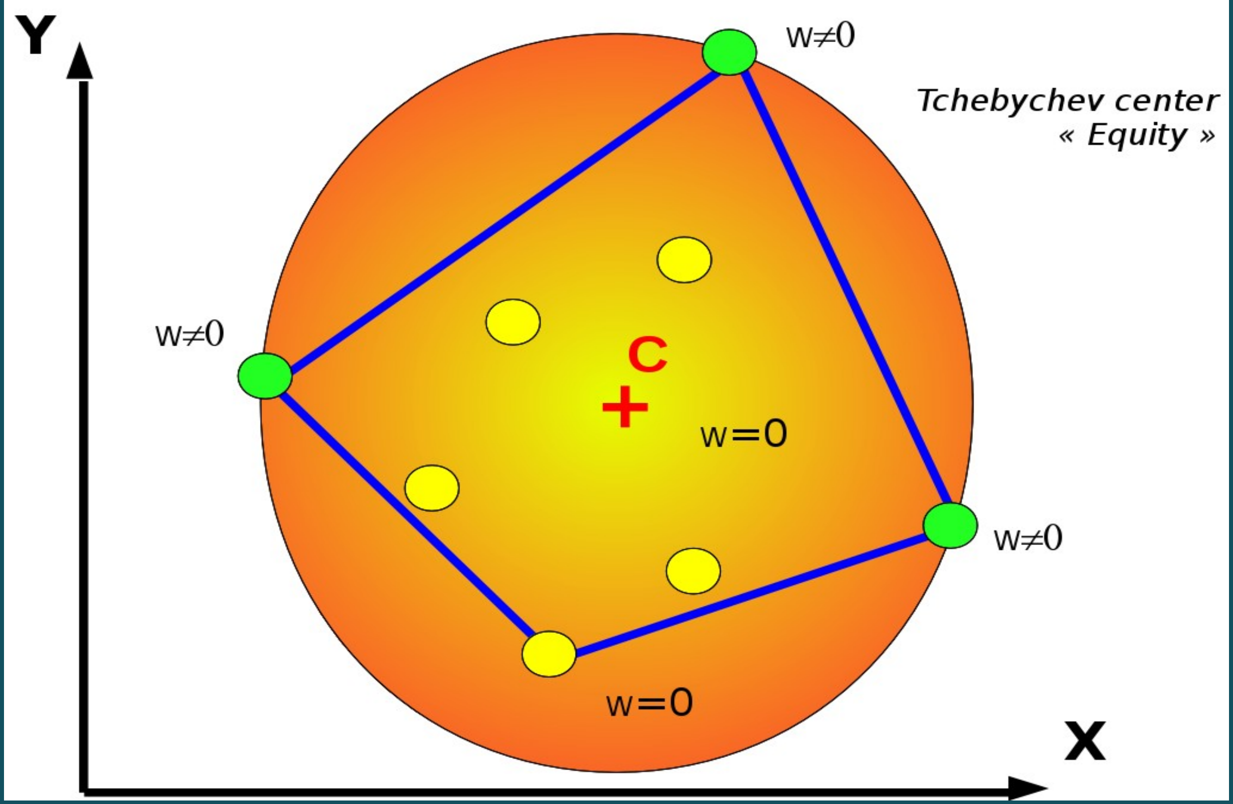
La seconde loi (cachée) de la géographie ?

JOSSELIN Didier, UMR ESPACE, didier.josselin@univ-avignon.fr
CILIGOT-TRAVAIN Marc, laboratoire de Mathématiques d'Avignon
ROJAS-MORA Julio, Universidad Austral de Chile
GOURION Daniel, laboratoire de Mathématiques d'Avignon

ThéoQuant'2017, Besançon, 17-19 mai 2017

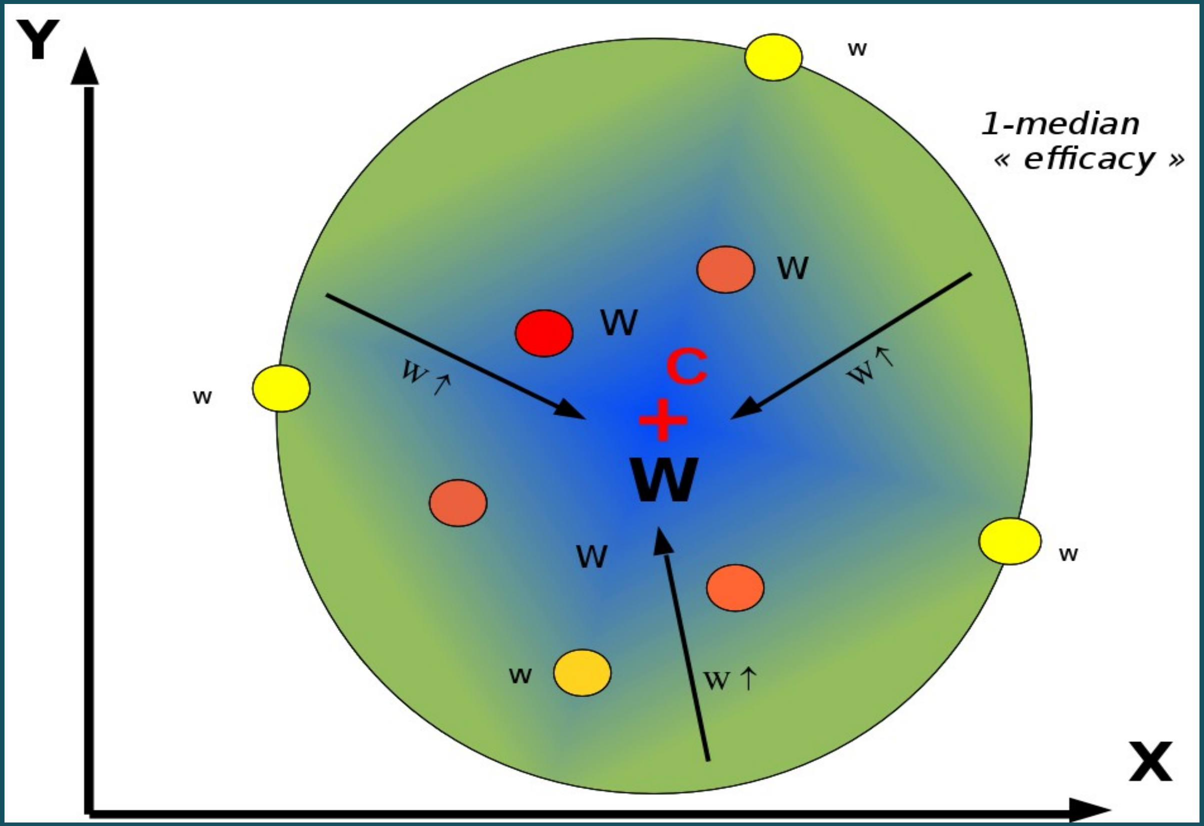
Metriques pour localiser un centre

- The Tchebychev center (1-center, minimax)



Metrics to locate a center

- The Weber point (1-median, minisum)



Metrics to locate a center

- The gravity center (centroid, minisum²)