

# Les interactions spatiales

Quelques conséquences de l'introduction du modèle radiatif

Jean-Michel Floch et Patrick Sillard

INSEE - Département de l'Action Régionale  
INSEE - Département des méthodes statistiques

Colloque Théoquant 2019

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Le modèle radiatif
- 3 La critique de la critique
- 4 Le modèle gravitaire après sa contestation
- 5 Bibliographie

# Motivations

- Une expérience de référent méthodologique au Département de l'action régionale de l'Insee.
  - ▶ Une utilisation fréquente du modèle gravitaire
 
$$T_{ij} = KM_i^\alpha N_j^\beta d_{ij}^{-\gamma}$$
  - ▶ Une connaissance limitée... des limites...
 
$$\log(T_{ij}) = \log(K) + \alpha \log(M_i) + \beta \log(N_j) - \gamma \log(d_{ij})$$

$$\mathbb{E} \left[ \exp(\widehat{\log(T_{ij})}) \right] \leq T_{ij}$$
  - ▶ Une connaissance limitée des formulations ou méthodes alternatives
  - ▶ Des conclusions parfois douteuses sur les échanges préférentiels
- Beaucoup de réserves, donc, vis à vis du modèle gravitaire usuel, le plus directement calqué sur la formulation newtonnienne
- La découverte récente, pour nous, du **modèle radiatif** dans lequel nous espérons, peut-être hâtivement trouver une alternative au modèle gravitaire.

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Le modèle radiatif**
- 3 La critique de la critique
- 4 Le modèle gravitaire après sa contestation
- 5 Bibliographie

# Simini, Gonzales, Maritan, Barabasi - 2012

- Une des revues les plus prestigieuses : **Nature**
- Des auteur(e)s appartenant à des Universités réputées
  - ▶ Filippo Simini - Bristol - Systèmes complexes
  - ▶ Marta C. Gonzales - Berkeley - Planification urbaine
  - ▶ Amos Maritan - Padoue - Physique statistique
  - ▶ Albert-Laszlo Barabasi - Notre Dame et Harvard - Réseaux complexes
- Ayant des formations de physiciens, et travaillant sur les réseaux
- Une affirmation forte, contenue dans le titre : **A *universal* model for mobility and migration patterns**

# Les critiques au modèle gravitaire

- Il n'existe pas de dérivation rigoureuse de la formulation gravitaire classique
- La faiblesse théorique du modèle entraîne l'utilisation de nombreux paramètres afin d'ajuster le modèle
- La calibration du modèle nécessite des données qui ne sont pas toutes disponibles
- La prédiction par le modèle gravitaire souffre de divergences systématiques
- Les flux peuvent augmenter (du fait de l'influence de la zone d'attraction) et devenir supérieur aux capacités d'émission
- Le modèle est déterministe et ne peut apprécier la fluctuation dans les flux

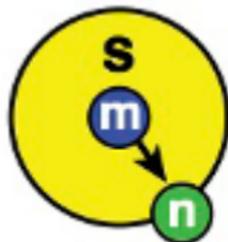
# La formulation

Le modèle proposé, dans le cas des flux de navetteurs s'écrit :

$$T_{ij}^R = T_i \cdot \frac{m_i m_j}{(m_i + s_{ij})(m_i + m_j + s_{ij})}$$

avec :

- $m_i$  et  $m_j$  les populations respectives des zones  $i$  et  $j$
- $s_{ij}$  la population située dans un rayon  $r_{ij}$  centré en  $i$  excluant la population de la zone de départ et de celle de destination



# La justification théorique

- Elle est issue de la physique (émission/absorption de particules)
- Elle est développée (avec beaucoup de raccourcis) dans le supplément à l'article de Nature
- L'idée est que notre individu, allant de  $i$  à  $j$ , situé à une distance  $d_{ij}$ , ne devra pas être "absorbé" dans les territoires situés à une distance inférieure
- On calcule, en supposant qu'il existe un seuil d'absorption une probabilité  $P(1|m_i, n_j, s_{ij}) = p_{ij}$  pour qu'un individu effectue ce trajet

# Un résultat qui ne dépend que des effectifs

- Les calculs sont assez lourds (lois du sup. ou de l'inf. de la variable aléatoire qui modélise modélisant le seuil d'absorption)
- Dans ce calcul, la densité de cette variable aléatoire d'absorption disparaît, par le fait d'un judicieux changement de variable...
- ..et le résultat final ne fait apparaître que les effectifs
- $P(1|m_i, n_j, s_{ij}) = p_{ij} = \frac{m_i m_j}{(m_i + s_{ij})(m_i + m_j + s_{ij})}$

- La probabilité jointe pour une séquence particulière d'absorption  $(T_{i1}, T_{i2}, \dots, T_{ij}, \dots, T_{iL})$  est une loi multinomiale de loi

$$P(T_{i1}, T_{i2}, \dots, T_{ij}, \dots, T_{iL}) = \prod_{j \neq i} \frac{T_{i.}!}{T_{ij}!} p_{ij}^{T_{ij}}$$

- On peut en dériver la loi marginale des  $T_{ij}$ :

$$T_{ij} \sim \mathcal{B}(T_{i.}, p_{ij})$$

- D'où le résultat précédemment énoncé :

$$T_{ij}^R = \mathbb{E}(T_{ij}) = T_{i.} p_{ij} = T_{i.} \frac{m_i m_j}{(m_i + s_{ij})(m_i + m_j + s_{ij})}$$

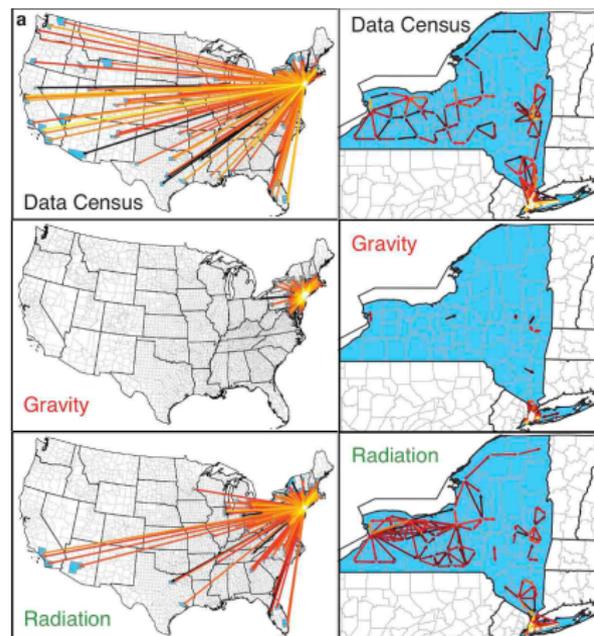
- En prime, une variance :  $Var(T_{ij}) = T_{i.} p_{ij} (1 - p_{ij})$

## Quelques remarques

- On a une dérivation du modèle radiatif de la physique, et on se base sur des comportements individuels
- Le modèle est sans paramètres. Les données de population agrégées suffisent à estimer les flux. On n'a pas besoin de connaître les flux réels.
- La somme des flux émis et la somme des estimations des flux émis sont égaux puisque par construction  $\sum_{i,j} p_{ij} = 1$
- Cette même condition interdit les flux dépassant les possibilités d'émission
- Le modèle ne fait pas apparaître de biais tel que celui qui est dû à la transformation logarithmique

# Confrontation des modèles

## Les cartes

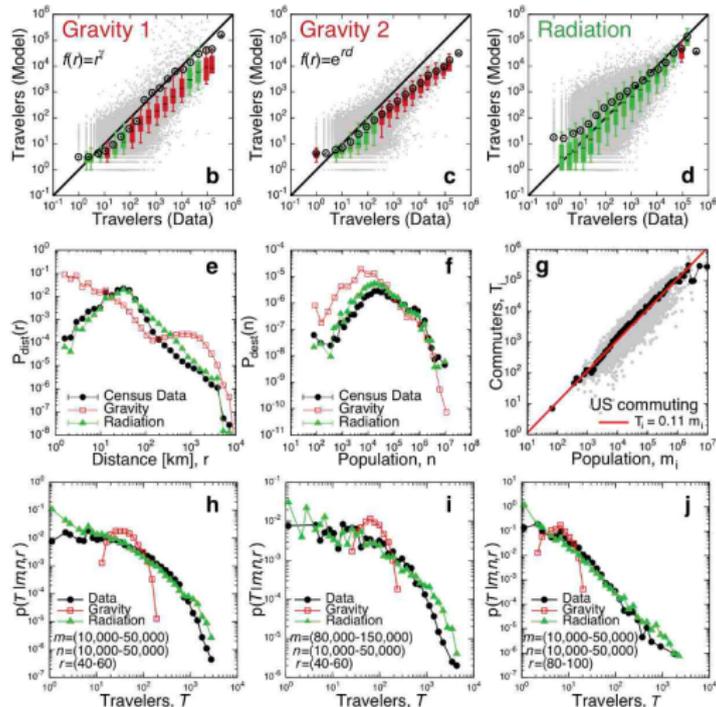


## Deux exemples

- Dans l'article principal
  - ▶ Les flux à partir de New-York (longue distance)
  - ▶ Les flux au sein du Comté de New-York
- D'autres exemples dans l'article complémentaire
- Ces exemples tendent à montrer la supériorité du modèle radiatif sur le modèle gravitaire

# Le mode de validation

Il est essentiellement graphique. Les indicateurs sont reportés dans l'article complémentaire.



# Les conclusions

- Une conclusion plus que catégorique (énoncée dans le deuxième article)

*These considerations provide further support to our thesis that any form of the gravity law is inherently inappropriate to satisfactorily describe commuting fluxes.*

- Des exemples tirés de divers domaines pour affirmer le caractère universel du modèle
  - ▶ Navetteurs
  - ▶ Mobilités résidentielles
  - ▶ Flux de marchandises
  - ▶ Appels téléphoniques
- Quelques considérations dans le paragraphe de conclusion sur les améliorations possibles (en dépit des performances supérieures du modèle)

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Le modèle radiatif
- 3 La critique de la critique**
- 4 Le modèle gravitaire après sa contestation
- 5 Bibliographie

## Premières réactions

L'arrivée de ce nouveau modèle, qui se veut universel, et aspire donc à se substituer au modèle gravitaire a bien entendu suscité des réactions. Elles sont issues de milieux divers et de différentes natures.

- des comparaisons entre les performances prédictives des différents modèles
- Extensions et amendements au modèle radiatif
- Une dominante des réactions dans le monde de la physique et de l'étude des réseaux
- Une discrétion du monde de la géographie, à l'exception de Commenges, qui note cette discrétion. Un travail de maîtrise, sous la direction de F.Bavaud.
- Les fondements du modèle sont peu abordés (sauf par Commenges(2016), qui aborde à la fois le formalisme et l'usage).

## Amendements et extensions

- Dans un des premiers articles de discussion, Masucci et al.(2013) publié dans Physical review font remarquer que la formulation du  $T_{ij}$  renvoie en thermodynamique à un système infini, alors que les systèmes que l'on étudie sont finis.
- On peut constater sur des exemples concrets que l'on n'a pas dans ce cas  $\sum_{i,j} p_{ij} = 1$ . Le biais est fonction de la zone d'émission (autour de 0.99 dans les navettes entre zones d'emploi, mais 0.95 pour les flux issus de Toulouse ou de Lyon, 0.86 pour les flux issus de Paris).
- La correction suivante, que l'on a pu vérifier permet de retrouver une somme des probabilités égale à 1.

$$T_{ij} = \frac{T_{i.} m_j}{1 - \frac{m_j}{\sum_i m_i}} \frac{m_i m_j}{(m_i + s_{ij}) (m_i + m_j + s_{ij})}$$

## Des modifications plus substantielles

- La modifications proposée par Masucci et al. restait pleinement dans le cadre du modèle radiatif
- D'autres amendements, tout en voulant se situer dans ce paradigme, sont plus substantielles
- C'est le cas de l'indicateur proposé par Yang et al.(2014) auquel participe la corédactrice de l'article de Nature, M.C.Gonzales)

- Dans ce cas, on écrit:

$$p_{ij} = \frac{[(m_i + n_j + s_{ij})^\alpha - (m_i + n_j)^\alpha] (m_i^\alpha + 1)}{[(m_i + n_j)^\alpha + 1] [(m_i + n_j + s_{ij})^\alpha + 1]}$$

- $\alpha$  est un effet d'échelle visant à contrôler le nombre d'opportunités entre i et j.
- On perd un peu de la belle simplicité du modèle de Simini et al. et surtout la caractéristique vantée du modèle d'être parameter-free.

# Le caractère prédictif

- Aucune des études consultées ne conduit à une supériorité du modèle radiatif sur le modèle gravitaire du point de vue prédictif.
- A l'exception des auteurs du modèles, c'est plutôt le modèle gravitaire qui semble fournir les meilleurs résultats.
  - ▶ Masucci et al. (2013) We show that even if the gravity model has a better overall performance the parameter-free radiation model gives competitive results, especially for large scales.
  - ▶ Lenormand et al. (2015) We observe that in both cases our approach yields significantly better results.
  - ▶ Lenormand et al. (2016) We show that the gravity law performs better than the intervening opportunities laws to estimate the commuting flows, to preserve the structure of the network and to fit the commuting distance distribution although it fails at predicting commuting flows at large distances.
  - ▶ Commenges (2016) Le présent travail poursuit cette comparaison sur une série historique de navettes et appuie les résultats obtenus par Masucci et al..
  - ▶ Stadler (2017) Les trois modèles retenus (modèle gravitaire à 3 paramètres, modèle radiatif sans paramètre et un modèle radiatif à un paramètre) ont été testés sur trois jeux de données. Le modèle ayant les meilleures performances prédictives dans 4 des 6 cas d'étude est le modèle gravitaire.
- On n'a pas trouvé dans la littérature de réponse des concepteurs du modèle radiatif

# L'absence de paramètres

- C'est Commenges qui a critiqué de la façon la plus directe la modélisation "**parameter-free**".
- Mais il est rejoint par d'autres auteurs, de façon moins tranchée
  - ▶ Lenormand et al. (2016) *More specifically, the superiority of the gravity approach seems to be due to its exhibility, and, what was considered as a weakness by Simini et al., the lack of theoretical guidance to choose the distance-decay function, emerges as a strength.*
  - ▶ Kang et al.(2015) *The original radiation model offers a plausible explanation to certain observed mobility patterns. However, despite having the advantage of being parameter-free and performing well at large spatial scale, it cannot offer satisfactory predictions of mobility patterns at different scale and for different mobility data.*

# Un débat partiellement biaisé

- Le modèle critiqué par Simini et al. est le modèle gravitaire sous sa forme "classique", celui qui prête le plus à la critique (mais reste le plus utilisé).
- Celui qui est confronté au modèle radiatif est le plus souvent:
  - ▶ Soit celui qui est issu des modèles à simple ou double contrainte
  - ▶ Soit des reformulations du modèle gravitaire comme chez Lenormand et al., dans une logique  $T_{ij} = T_i.p_{ij}$
- Si Wilson(1971) est cité, on ne trouve pas en bibliographie le manuel de Sen et Smith(1995) qui définit de façon beaucoup plus large les modèles gravitaire. Celui de Fischer et Griffiths(2016) va dans le même sens mais n'était pas paru.
- Les critiques classiques du modèle gravitaire usuel ne sont évoquées qu'à la marge, tout comme les variantes poissonniennes.

## Formalisme et théorie

Le modèle proposé par Simini et al., issu de la physique repose sur un formalisme fort. Mais la force du formalisme n'est pas tout.

Les auteurs parlent d'analogie pour les modèles. Denise Pumain préfère parler -dans le cas du modèle gravitaire de transfert de modèle, peut être pour ne pas prêter le flanc à la critique de Bouveresse.

Mais analogie ou transfert, les concepts physiques même lorsque les mathématiques sont propres passent mal d'un monde à l'autre. l'isotropie du mouvement des navetteurs, ou des migrants est moins fondée que celle des particules, par exemple.

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Le modèle radiatif
- 3 La critique de la critique
- 4 Le modèle gravitaire après sa contestation**
- 5 Bibliographie

## Petit bilan provisoire

- Il semble que le modèle radiatif, en tout cas dans sa version initiale ne soit pas aussi universel que l'annonçaient ses auteurs, et n'ait pas tenu toutes ses promesses.
- Le modèle gravitaire a bien "résisté", mais pas sous sa forme usuelle (MCO après transformation logarithmique).
- Il faut sans doute
  - ▶ Poursuivre l'expertise du modèle radiatif et de ses variantes
  - ▶ Reconsidérer la façon dont on présente le modèle gravitaire

# La zoologie des modèles gravitaires

- Le modèle général peut s'écrire, en suivant Griffiths et Fischer(2016)

$$E(T_{ij}) = K_{ij}M_iN_jF(d_{ij})$$

- Fonctions  $F()$ . puissances ou exponentielles négatives
- De cette formulation, on peut déduire le modèle gravitaire usuel, dans lequel  $K_{ij} = K$
- Les modèles à simple ou double contrainte sont également déduit de cette formulation
- dans le cas du modèle simple,  $K$  est estimé de la façon suivante :

$$K = T_{..} \left[ \sum \sum_{i,j} M_i N_j F(d_{ij}) \right]^{-1}$$

# Le modèle à double contrainte

- $E(T_{ij}) = A_i B_j M_i N_j F(d_{ij})$ ,  $A_i$  et  $B_j$  étant des facteurs d'ajustement
- C'est apparemment un des modèles, qui dans sa confrontation avec le modèle radiatif donne les meilleurs résultats (Piovani et al., 2018).
- Par construction, on retrouve la somme des flux en ligne et en colonne
- Ce modèle peut être dérivé d'un modèle physique basé sur l'entropie

## Micro et macro-états

L'article de Wilson en 1971 est fondé sur des considérations **issues de la physique statistique**. On peut distinguer:

- Des **macro-états** observés, par exemple le nombre de navetteurs entre la commune  $i$  et la commune  $j$
- Des **micro-états**, dans lesquels les flux  $F_{ij}$  correspondants à des mouvements particuliers d'individus, connus (mais important peu) ou inconnus

### Micro et macroétats

- 4 individus U, X, Y, Z
- 5 états A, B, C, D, E
- 6 microétats possibles pour le macroétat  
 $N_A=2, N_B=2$

### Illustration

Microétats	Individus			
	U	X	Y	Z
1	A	A	B	B
2	A	B	A	B
3	A	B	B	A
4	B	A	A	B
5	B	A	B	A
6	B	B	A	A

# De l'entropie à la double contrainte

- La maximisation du nombre de macro-états possibles

$W = \frac{T!}{\prod_{ij} T_{ij}!}$  sous contrainte de coût (distance) et de marges  
conduit au modèle à double contrainte

- On a donc pour cette modélisation un fondement rigoureux
- Le modèle est estimé de façon itérative, après avoir déterminé un coefficient de distance.

# Une formulation poissonnienne?

- Flowerdew et Aitkin(1982) avaient proposé une formulation poissonnienne du modèle gravitaire, en réponse aux problèmes d'estimation. Ce modèle permettait d'introduire des variables explicatives et des effets fixes liés aux origines et destination.

$$T_{ij} \sim \mathcal{P}(\mu_{ij})$$

$$\mu_{ij} = \exp(\alpha_0 + \beta' X_{ij} - \theta d_{ij} + \eta_i + \nu_j)$$

- On peut trouver dans Fischer et Griffiths(2016) des théorèmes sur l'équivalence entre relations d'équilibrage, facteurs fixes et facteurs aléatoires dans le cas de modèles de Poisson contraints sur les marges.

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Le modèle radiatif
- 3 La critique de la critique
- 4 Le modèle gravitaire après sa contestation
- 5 Bibliographie**

# Bibliographie

- Commenges, H. (2016). Modèle de radiation et modèle gravitaire-Du formalisme à l'usage. *Revue Internationale de Géomatique*, 26(1), 79-95.
- Sen, A., et Smith, T. E. (2012). Gravity models of spatial interaction behavior. Springer Science et Business Media.
- Griffith, D. A., et Fischer, M. M. (2016). Constrained variants of the gravity model and spatial dependence: model specification and estimation issues. In *Spatial Econometric Interaction Modelling* (pp. 37-66). Springer, Cham.
- Kang, C., Liu, Y., Guo, D., et Qin, K. (2015). A generalized radiation model for human mobility: spatial scale, searching direction and trip constraint. *PloS one*, 10(11), e0143500.
- Lenormand, M., Huet, S., Gargiulo, F., et Deffuant, G. (2012). A universal model of commuting networks. *PloS one*, 7(10), e45985.
- Lenormand, M., Bassolas, A., et Ramasco, J. J. (2016). Systematic comparison of trip distribution laws and models. *Journal of Transport Geography*, 51, 158-169.
- Masucci, A. P., Serras, J., Johansson, A., et Batty, M. (2013). Gravity versus radiation models: On the importance of scale and heterogeneity in commuting flows. *Physical Review E*, 88(2), 022812
- Piovani, D., Arcaute, E., Uchoa, G., Wilson, A., et Batty, M. (2018). Measuring Accessibility using Gravity and Radiation Models. *arXiv preprint arXiv:1802.06421*
- Simini, F., González, M. C., Maritan, A., et Barabási, A. L. (2012). A universal model for mobility and migration patterns. *Nature*, 484(7392), 96.
- Yan, X. Y., Wang, W. X., Gao, Z. Y., et Lai, Y. C. (2017). Universal model of individual and population mobility on diverse spatial scales. *Nature Communications*, 8(1), 1639

Merci de votre attention