

Première partie

L'approche fractale des textures urbaines

P. Frankhauser

1.1 La modélisation fractale des tissus urbains

1.1.1 Pourquoi utiliser la géométrie fractale ?

La forme des villes anciennes paraît souvent en cohérence avec nos références géométriques euclidiennes. Considérons l'exemple d'une ville médiévale construite selon un plan défini représenté sur la **fig. 1-1 (a)**. Elle est entourée d'une enceinte quasi circulaire. Son étendue peut donc assez bien être caractérisée par son diamètre ε et son périmètre p et, dans le cas d'un cercle, ces deux paramètres peuvent être reliés par la relation $p = \pi \varepsilon$. De même, pour un plan semblable à celui de la colonie romaine Timgard (**fig. 1-1(b)**), un carré serait une bonne approche et on trouverait une relation analogue entre périmètre p et longueur de base ε : $p = 4 \varepsilon$.

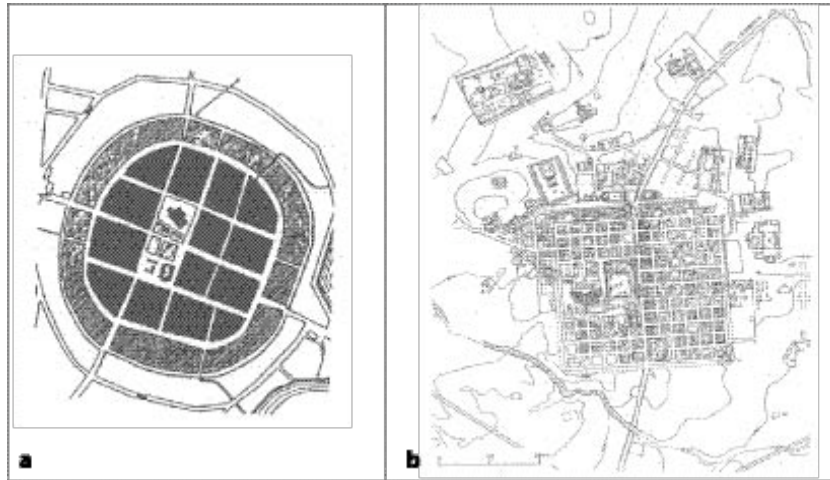


Fig. 1-1 Le plan initial de Friedeberg/Neumark (a), (d'après Mann 1988) et de Timgard (b) (d'après L. Benevolo)

Même si certaines villes anciennes avaient des plans aussi simples que des carrés ou des cercles, nous savons que d'autres villes s'étendaient déjà le long d'axes de transport et que des espaces non-bâties subsistaient à l'intérieur de leur enceinte. La perte de la forme « compacte » s'accroît avec l'étalement de la ville industrielle et post-industrielle. Un bel exemple d'une agglomération actuelle est la « tache urbaine » de Stuttgart (**fig. 1-2**), exemple d'une zone métropolitaine très fragmentée, mais qui jouit toutefois d'un bon renom pour sa qualité de vie. Il est évident que seule l'étude de la ville centre n'est pas pertinente pour caractériser l'espace vécu de ses habitants. La localisation de centres commerciaux extra-muros, de zones de loisirs situés au Sud et à l'Est de la ville, les flux pendulaires vers la ville centre, vers les villes périphériques et entre ces villes reflètent, comme dans beaucoup de cas, le fonctionnement *multi-échelle* d'un tel espace. Dans ces zones métropolitaines, des espaces verts, des zones résidentielles et commerciales s'articulent et il paraît difficile d'identifier des limites claires entre la « ville » et la « campagne ».

La complexité des formes ne serait-elle pas une conséquence de ce fonctionnement multi-échelle ? La remarque de M. Batty et P. Longley que « la forme suit la fonction » résume bien l'articulation entre le fonctionnement de la ville et la forme qui en résulte (**M. Batty et P. Longley, 1994**).

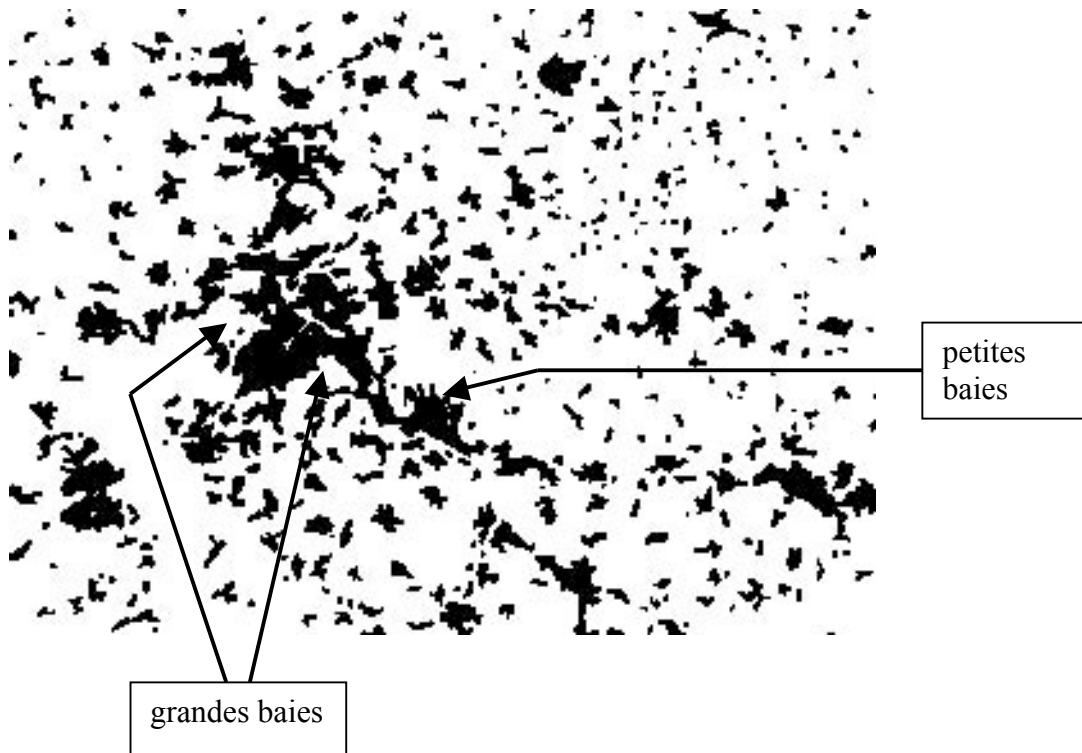


Fig. 1-2 *L'agglomération de Stuttgart : les taches urbaines sont de tailles différentes, réparties de façon non-homogène et leurs bordures montrent des baies de tailles variées qui pénètrent dans la surface bâtie*

L'aspect fragmenté sous lequel se présente cette articulation entre zones bâties et non-bâties dans les agglomérations actuelles, incite à percevoir ces dernières comme « amorphes », donc « sans forme » – ce qui revient finalement à dire que nous ne disposons ni du vocabulaire, ni des références géométriques appropriées pour les décrire. Or, différentes observations montrent que les tissus bâtis sont structurés selon certains principes d'ordre interne. Nous rappelons quelques résultats préliminaires qui ont incité à approfondir cette piste. Dans **Frankhauser (1993)** nous avons donné le résultat d'une étude dans laquelle nous avons mis en relation la longueur du périmètre des agglomérations avec la surface bâtie située à l'intérieur de ce périmètre. Même s'il s'agissait de représentations cartographiques simplifiées, comme celle de Stuttgart, la comparaison d'une soixantaine d'agglomérations nous a permis de montrer que la longueur du périmètre P était quasi *proportionnelle* à la surface A . Il existe donc d'une part une relation forte entre périmètre et surface, mais celle-ci n'est pas en concordance avec la géométrie habituelle car pour un cercle ou un carré on trouve des relations du type $A \sim P$.

Cette analyse transcrit l'allongement considérable des bordures urbaines. Cet allongement se présente de façon particulière : la bordure urbaine montre des grandes « baies » qui pénètrent dans la surface bâtie celles-ci étant souvent elles-mêmes composées d'un nombre croissant de plus petites baies, ce qui donne au final l'aspect tentaculaire et dentelé des agglomérations.

Il est possible de trouver d'autres indices montrant l'existence d'une organisation particulière dans la répartition de la masse bâtie dans les agglomérations. Pour un certain nombre de zones métropolitaines, nous avons classé les communes selon leur surface bâtie et nous avons constitué des classes qui regroupent toutes les communes dont la surface se situe dans des

fourchettes définies. Chacune de ces classes peut alors être caractérisée par sa valeur centrale a_i . Ensuite nous avons déterminé le nombre v_i de taches urbaines appartenant à ces classes et nous avons étudié la relation entre ce nombre et les valeurs centrales. On s'aperçoit qu'il existe une relation particulière entre ces deux variables qui correspond à une distribution hiérarchique du type Pareto-Zipf¹.

Par ailleurs, on s'aperçoit que les habitats ne sont le plus souvent pas répartis de manière homogène, mais qu'ils sont concentrés le long d'axes de transport comme à Berlin (**fig. 1-1**) ou à Stuttgart (**fig. 1-2**). Il existe ainsi des zones dans lesquelles le bâti est beaucoup plus concentré que dans d'autres endroits. Ceci se traduit par une baisse de la densité en s'éloignant des centres densément peuplés. **Bussière et Stovall (1981)** ont pu montrer que la densité décroît du centre vers la périphérie également selon une loi de Pareto-Zipf, ce qui incite à supposer que la répartition de la masse bâtie suit éventuellement, elle aussi, une telle loi.

Une logique similaire semble exister pour les vides (*i.e.* les lacunes) à l'intérieur des tissus urbains : il existe peu de très grandes places vides et un nombre plus élevé d'espaces de plus petite taille et enfin, un grand nombre de cours intérieures. Il semble donc que les espaces bâtis soient structurés selon un principe d'emboîtement d'échelles.

Tous ces phénomènes sont des indices qui nous laissent supposer que les zones métropolitaines sont structurées selon certains principes d'organisation, en dépit de leur aspect irrégulier. Ce principe d'organisation paraît lié à des phénomènes hiérarchiques, basés sur un *emboîtement d'échelles* et nous avons vu que la loi de Pareto-Zipf est une bonne approche pour un certain nombre de ces phénomènes. Or comme l'a mis en évidence **B. Mandelbrot (1983)**, la géométrie fractale peut en effet être interprétée comme la transcription géométrique d'une telle loi.

Retraçons d'abord la logique de cette loi de distribution. Supposons que le système considéré soit constitué de plusieurs niveaux hiérarchiques $n = 1, 2 \dots$ où le niveau 1 est le plus élevé. Pour chacun de ces niveaux, on peut définir une taille caractéristique ε_n de leurs éléments. C'est ainsi que nous avons regroupé les villes selon leur surface en classes. La loi de Pareto-Zipf lie alors le nombre d'éléments $v(\varepsilon_n)$ que l'on trouve à ce niveau n , au nombre d'éléments du niveau supérieur suivant $n - 1$ par la relation

$$v(\varepsilon_n) = v_0 \times v(\varepsilon_{n-1})$$

où v_0 est un facteur constant. En même temps la taille ε_n est réduite par un facteur constant r par rapport au niveau précédent :

$$\varepsilon_n = r \times \varepsilon_{n-1}$$

En combinant ces deux progressions géométriques, on obtient une relation hyperbolique entre $N(\varepsilon_i)$ et ε_i

¹ Rappelons que le système de peuplement suit une logique similaire connue depuis longtemps en démographie urbaine sous la désignation « loi rang-taille des villes ». On pourrait donc imaginer que cette loi correspond à un principe d'organisation plus général dans le contexte de la géographie urbaine.

$$N(\varepsilon_i) = \varepsilon_i^{-D}$$

Le principe décrit un *emboîtement d'échelles régulier* : en passant d'un niveau donné au niveau inférieur suivant, on reproduit ce que l'on avait généré à l'étape précédente mais à une échelle plus fine et on multiplie le nombre de ces éléments. On pourrait illustrer une telle hiérarchie de la façon suivante :

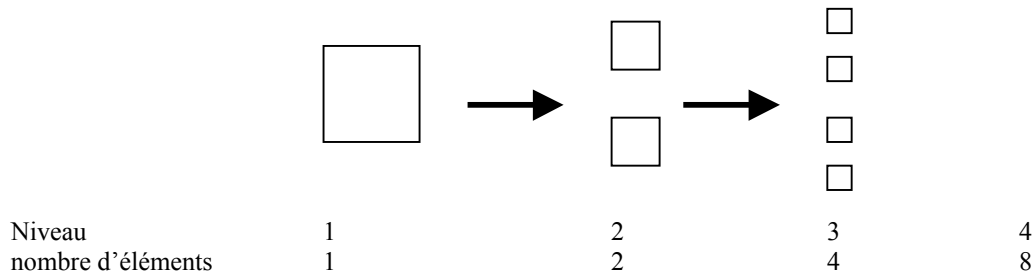


Fig. 1-3 Le principe d'une loi hiérarchique de Pareto-Zipf

L'emboîtement d'échelle suit ainsi le principe le plus simple que l'on puisse imaginer. Ceci a conduit le physicien Nicholis à constater que « les objets fractals représentent un nouveau modèle de structures complexes, issues cependant de mécanismes relativement simples » (**Nicholis 1985**).

Dans l'exemple de la relation périmètre-surface observée dans les agglomérations, il est moins évident de repérer un tel principe hiérarchique. Cependant il est possible de le rendre apparent à travers les propriétés de certaines fractales construites.

La géométrie fractale a fait ses preuves depuis une vingtaine d'année dans beaucoup de disciplines comme la météorologie, la biologie, la physique des matériaux, la théorie thermodynamique mais aussi en géographie. Le fait qu'il s'agisse d'une approche géométrique permet d'aborder un phénomène spatial de deux façons :

- par le biais de modèles de références qui peuvent servir à illustrer un phénomène spatial ;
- en utilisant des mesures morphologiques fractales.

En réalité ces deux approches sont étroitement articulées : pour un phénomène donné, un certain type de modèle fractal est souvent plus adapté qu'un autre. Or ce choix conditionne l'utilisation de méthodes particulières de mesure. Les descripteurs fractals transcrivent ainsi certaines propriétés hiérarchiques d'une structure dont le sens ne devient évident qu'en se servant de modèles fractals comme référence. Ces modèles fractals jouent un rôle équivalent aux références dont nous nous servons dans la géométrie euclidienne, tels que le cercle le carré ou le triangle.

En utilisant des mesures fractales il paraît possible en théorie de vérifier l'existence d'une loi hiérarchique dans une répartition. Le fait de pouvoir étudier un phénomène à travers les échelles fournit aussi la possibilité de découvrir des seuils dans l'organisation spatiale. Une comparaison morphologique et une classification des tissus urbains paraissent ainsi possibles. Elles permettent de mieux mettre en évidence des principes d'ordre interne que l'on ne trouve pas en recourant à d'autres approches.

Le caractère géométrique de l'approche fractale fournit aussi la possibilité de concevoir, après avoir réalisé des analyses morphologiques, des structures théoriques de référence qui suivent le même principe d'ordre interne que les tissus réels. Dans le contexte urbanistique, ceci peut servir de point de départ pour des réflexions sur la structuration des espaces urbains et périurbains.

1.1.2 Différentes thématiques – différents modèles

Nous avons convenu de ne considérer dans cette étude que la répartition de la surface bâtie dans les tissus urbains et de nous intéresser à la forme spatiale que montrent ces tissus. L'approche fractale la plus aisée des tissus urbains passe en effet par cette notion de répartition de la surface bâtie : cette approche paraît parlante car nous avons pris l'habitude de raisonner en intensité d'occupation du sol, par exemple à travers la notion de *densité*. En outre le débat de l'étalement urbain et les prises de position en faveur de la « ville compacte » s'inscrit dans cette même logique. Il est donc facile de confronter l'approche fractale à ces approches traditionnelles.

La référence des mesures traditionnelles, tant qu'elles sont basées sur la notion de densité, considère par définition *l'occupation moyenne* dans un espace donné : ainsi une densité constante décrit une situation où une masse donnée est répartie de façon complètement homogène. En se référant à une logique hiérarchique, la géométrie fractale est basée sur des modèles dans lesquels la masse est répartie de façon non homogène. Ceci rend l'application de ces mesures pratiquement caduques.

Toutefois il n'existe pas de contradiction entre la géométrie fractale et un modèle spatial dans lequel une masse est répartie de façon homogène. L'homogénéité apparaît comme cas limite de la géométrie fractale, il n'y a donc pas opposition entre les deux approches ce qui est un avantage d'un point de vue épistémologique².

Nous présentons donc plusieurs modèles fractals dans lesquels on considère la répartition d'une surface occupée sur un espace vide. Pour chacun de ces modèles nous essayons d'établir un lien entre le modèle théorique et la réalité de l'organisation spatiale ainsi que le fonctionnement des tissus urbains actuels. Ceci permet de concrétiser l'intérêt d'utiliser l'approche fractale aussi bien dans le contexte conceptuel de l'aménagement urbain que dans l'objectif de développer des descripteurs morphologiques. Par ailleurs, la connaissance des propriétés géométriques des modèles permettra de mieux comprendre le contenu des informations transcrites par les analyses fractales.

Il est évident que les tissus urbains peuvent être considérés à plusieurs niveaux d'organisation. À une échelle fine, la texture urbaine est constituée de bâtiments. La forme de chaque bâtiment, à travers son emprise au sol, ne joue un rôle qu'à une telle échelle détaillée³. Dans notre contexte, la forme du tissu bâti est plutôt conditionnée par la *position* de chaque

² Ceci permet donc de garantir une cohérence logique dans la modélisation des phénomènes spatiaux comme ceci est revendiqué par exemple en physique ou en économie. Ainsi on montre en physique que la mécanique classique est un cas limite de la mécanique quantique tout comme l'optique géométrique est un cas limite de l'optique des ondes. En économie le passage entre l'équilibre général, valable pour un nombre infini d'agents et l'équilibre de Nash, valable pour un nombre restreint d'agents s'inscrit dans le même esprit. De même, la logique floue contient comme cas limite la logique classique.

³ Exception faite lors de la présence de très grands bâtiments notamment des bâtiments industriels ou des grands centres commerciaux dont la taille est comparable à celle d'un îlot urbain.

bâtiment par rapport aux autres, donc par la *configuration spatiale*, qui apparaît à partir de l'échelle de l'îlot, voire le quartier. À cette échelle, il est possible d'étudier les différences entre des quartiers anciens du centre ville, des quartiers haussmaniens, ou des quartiers pavillonnaires dans la première et deuxième couronne d'une ville.

À l'échelle d'une zone métropolitaine, on s'intéresse aussi au semis des habitats. Celui-ci peut être abordé de trois façon différentes (**fig. 1-4**) :

- on peut se borner à étudier la localisation des habitats sans considérer la taille ni la forme des « taches urbaines ». On étudie alors un semis de points ;
- on peut garder l'information sur la surface bâtie des communes en négligeant alors la forme des taches urbaines. Cette approche correspond à l'étude réalisée pour la distribution des agrégats dans la région de Stuttgart ;
- enfin, on peut inclure l'étude de la forme des taches urbaines. Dans ce cas, on considère aussi la morphologie des taches urbaines.

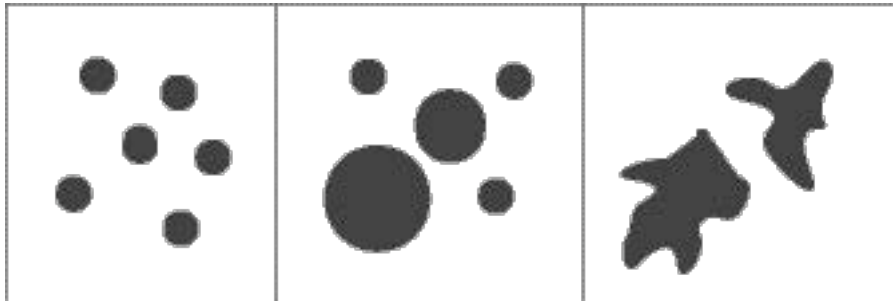


Fig. 1-4 *Les trois façons de considérer un semis d'habitat (cf.texte)*

La géométrie fractale permet de développer des modèles adaptés aux trois type de questions. Selon leur logique, les deux premières questions s'intéressent de façon globale à la répartition de la masse bâtie sans pour autant se focaliser sur l'aspect de la forme. Dans notre étude, nous privilégierons donc plutôt la troisième approche. Celle-ci peut également être abordée par deux entrées :

- l'aspect surfacique : on étudie la répartition de la surface réelle à partir de méthodes semblables à celle utilisées à l'échelle intra-urbaine ;
- on se focalise sur la forme même de la tache urbaine.

Se référant à des termes courants, la première démarche devrait permettre de distinguer, à travers la valeur d'un paramètre de forme, une ville circulaire d'une ville linéaire ou d'une ville tentaculaire qui s'étend le long d'axes de transport et qui est constituée de plusieurs agrégats. Il est évident que la notion de densité ne peut pas fournir une telle information.

La deuxième démarche incite à considérer une autre caractéristique des tissus urbains qui apparaît souvent dans le débat urbanistique : *la bordure urbaine*. La perte de la forme compacte des tissus urbains est souvent associée à l'allongement de la bordure des villes et citée comme un phénomène qui accompagne l'étalement urbain. Il semble donc intéressant de disposer de moyens pour mesurer le degré de fragmentation ou de « dendricité » des bordures urbaines. Or en réalité il est difficile d'identifier les bordures urbaines car il s'agit d'un artefact : les seules limites nettement identifiables dans les tissus bâtis sont les murs des

bâtiments, les enceintes ayant généralement disparu⁴, et si l'INSEE a introduit la bande de 200 m entre bâtiments pour pouvoir parler d'un bâti non-continu, cette définition paraît plutôt arbitraire. Néanmoins, nous allons voir qu'il est possible d'approcher la question de l'allongement de la bordure urbaine aussi bien d'un point de vue théorique que pratique.

Nous allons retrouver ces thématiques dans les concepts de modèles fractals présentés.

Le principe de base

Le principe de base de la géométrie fractale est la répétition d'un principe d'emboîtement d'échelles. Comme cette répétition est stricte (dans une fractale simple), deux éléments suffisent pour caractériser une fractale :

- **la forme de la structure de base**, désignée comme **initiateur** ou **figure initiale**. Il s'agit en général d'un objet géométrique euclidien : un carré, un cercle, mais aussi une figure quelconque, par exemple « \ominus ». L'initiateur joue un rôle mineur dans la théorie fractale, il représente en quelque sorte la partie euclidienne dans un objet fractal, car il exprime si un objet ressemble plutôt à un carré, un cercle etc. Il est lié à un paramètre « non-fractal » auquel nous allons être confrontés dans nos analyses, le *facteur de forme* ;
- **la règle de répétition** qui génère le système spatial hiérarchique est désignée comme le **générateur** de la fractale. Ses caractéristiques sont cruciales pour les descripteurs morphologiques fractals, en particulier, *les dimensions fractales*. Le générateur définit de quelle manière on passe d'une échelle à la suivante. Il contient l'information sur les paramètres qui caractérisent le principe d'emboîtement. Dans l'exemple donné de la hiérarchie des habitats dans une aire métropolitaine, il s'agirait des paramètres ν_0 et r ;
- la fractale est générée en appliquant cette règle de façon itérative. Nous distinguons donc les différentes **étapes d'itération**. À chaque étape, la structure générée est constituée de répliques de la figure initiale que nous désignons comme les **éléments** ou **éléments occupés** de la structure. Nous désignons l'ensemble de ces éléments occupés comme la **masse occupée** d'une fractale à une étape d'itération donnée.

Notons que le principe d'emboîtement d'échelle dans les fractales est souvent désigné par les termes *homothétie interne* ou *auto-similarité*.

Mathématiquement il n'existe aucune contrainte pour l'emboîtement d'échelle, il existerait donc un nombre illimité de niveaux hiérarchiques. Mais il faut être conscient qu'une structure fractale construite de cette manière reste un modèle théorique, une référence. Dans aucun contexte réel, on ne trouve un principe répétitif à une infinité d'échelles. Au mieux, l'auto-similarité existe dans une certaine fourchette d'échelles. Pour cette raison Mandelbrot a préféré parler de « *préfractale* ». Nous allons aussi utiliser la notion de « *comportement scalant* » au lieu d'auto-similarité, notamment si la logique de la hiérarchie change à travers les échelles.

Avant d'introduire les modèles fractals qui nous servons de référence pour étudier l'organisation spatiale des tissus urbains, il paraît utile de clarifier le vocabulaire de base dont nous nous servons désormais. Comme nous ne distinguons dans le cadre de cette étude que la surface bâtie de la surface non-bâtie nous introduisons des modèles fractales qui suivent

⁴ À l'exception de murs érigés dans des contextes politiques, comme le mur de Berlin ou d'autres qui subsistent malheureusement comme par exemple à Belfast, Nicosie ou Jérusalem.

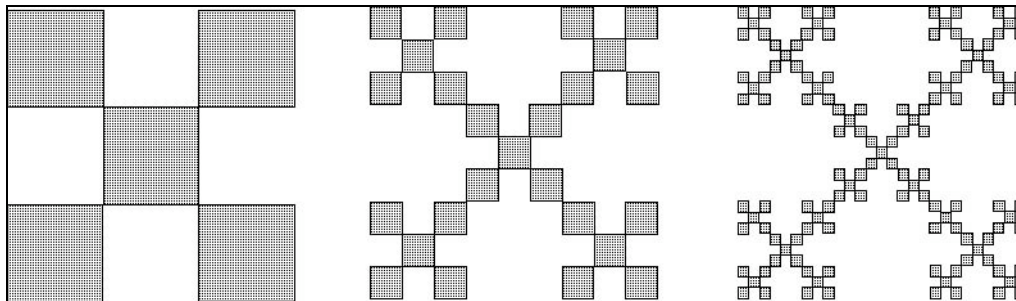
également cette logique « binaire ». Ainsi les *éléments* générés à chaque étape correspondent dans une interprétation urbanistique à une représentation symbolique de la *surface bâtie* qui est entourée d'espace non-bâti, « vide ». L'ensemble des éléments générés à une étape d'itération donnée ou l'ensemble de la surface bâtie dans un tissu urbain, sont désignés comme *surface occupée* qui est constituée de *points occupés*. Dans le contexte d'une ville, nous parlons aussi de *masse bâtie*. Nous supposons habituellement que la surface occupée est représentée en *noir*, les surfaces vides en *blanc*.

Les tapis de Sierpinski – des modèles pour la répartition de la surface bâtie

Nous rappelons brièvement la logique de ce modèle qui a été présentée dans un certain nombre de publications (cf. par exemple **Mandelbrot 1985** ; **Frankhauser 1993**). La **fig. 1-5** montre les premières étapes de construction d'une telle fractale. La figure initiale est un carré d'une longueur de base donnée L . Celui-ci est réduit par un facteur $r = 1/3$ et on place $N = 5$ de ces carrés de longueur de $l_1 = r \cdot L = 1/3 L$ selon une disposition choisie. Cette figure représente le générateur. Lors de l'étape suivante, on remplace chaque carré de longueur l_1 par $N = 5$ carrés de longueur $l_2 = r \cdot l_1 = 1/9 L$. L'objet est ainsi constitué de $N_2 = N^2$ carrés de longueur l_2 . Pour les prochaines étapes on répète la même procédure et pour une étape n on la longueur de base des carrés est égale à $l_n = r^n \times L$. On vérifie que la surface de cet objet est alors :

$$A_n = N_n \cdot (l_n)^2 = \left(\frac{5}{9}\right)^n \cdot L \quad (1)$$

Comme $5/9 < 1$ la surface tend vers zéro, si on poursuit l'itération.



lacune niveau 1 2 1 3 2 1

Fig 1-5 *Les premières étapes de construction d'un tapis de Sierpinski. À gauche le générateur qui est ensuite appliqué à chaque carré occupé. Ainsi apparaît un système spatial qui montre un emboîtement d'échelles à travers les lacunes vides, générées au fil des itérations*

Nous observons qu'il existe dans le tapis de Sierpinski dès la deuxième étape d'itération des carrés vides, de taille différente : les quatre grandes lacunes de taille l_1 générées lors de la première étape et $4 \times 5 = 20$ lacunes de taille l_2 qui apparaissent à l'étape suivante. En poursuivant l'itération, on imagine que le nombre de lacunes générées $N_{lac}(l_n)$ est à chaque fois multiplié par $N = 5$, tandis que leur taille diminue. Ainsi, les lacunes générées à une étape n ont la même longueur que les éléments occupés à cette étape, soit $l_n = r^n \times L$. On vérifie que le système spatial des lacunes suit une distribution hiérarchique du type Pareto-Zipf :

$$N_{lac}(l_n) = l_n^{-\delta}$$

Le générateur présenté définit de quelle manière la surface occupée (et non-occupée) évolue au cours des étapes d'itération. Il est aussi possible de trouver un générateur qui permet de construire la bordure de cet objet telle qu'elle apparaît à chaque étape d'itération (**fig. 1-6**).



Fig. 1-6 La construction fractale de la bordure du tapis de Sierpinski : le générateur et la deuxième étape d'itération

Pour cet objet, les paramètres L , N et r sont évidemment les mêmes. En revanche on vérifie que la longueur P_i du périmètre tend vers l'infini. Tandis que la surface de l'objet tend donc vers zéro, son périmètre diverge. Il est évident qu'un tel comportement n'est pas en concordance avec la géométrie euclidienne.

La bordure montre également dans son organisation spatiale des caractéristiques multi-échelles, hiérarchiques : lors de la première étape on crée une grande boucle donc une déviation importante par rapport à la ligne droite ; la taille de cette boucle est de l'ordre de grandeur de l_1 . L'étape suivante fait émerger des boucles plus petites de taille $l_2 = r \times L$, mais on en trouve maintenant $N = 5$ boucles de ce genre. Ce principe hiérarchique suit donc la même loi que celle des lacunes.

Par la règle de construction que nous avons utilisée, le tapis de Sierpinski reste confiné à l'intérieur du carré initial de longueur L . Nous présentons maintenant un autre mode de construction d'un tapis de Sierpinski qui rappelle plus la logique de l'étalement urbain. On part toujours d'un carré de longueur L , mais on ajoute d'autres carrés autour de cette figure initiale. Un tel exemple est représenté dans la **fig. 1-7**. Dans cet exemple, on a posé quatre carrés de taille L sur les quatre côtés du carré initial. On obtient ainsi le générateur composé de $N = 5$ carrés disposés en croix. À chaque côté de cet agrégat on ajoute, lors de la prochaine étape d'itération, la figure en croix de façon à obtenir un agrégat composé de $N_2 = N^2$ etc. L'agrégat s'étale ainsi progressivement dans l'espace.

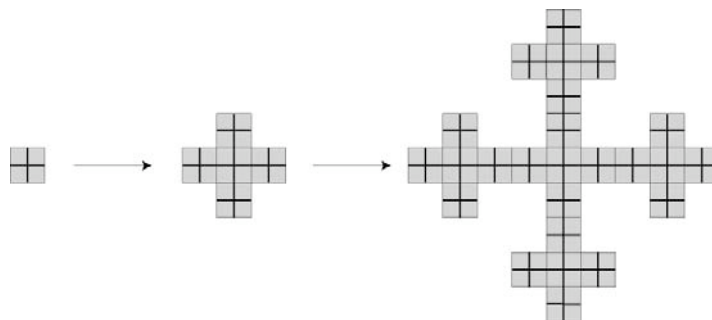


Fig. 1-7 La génération du tapis de Sierpinski par un autre mode d'itération (cf. texte)

Il est possible de donner à ce modèle une interprétation urbanistique en considérant la séquence des itérations comme des étapes dans l'étalement progressif d'une agglomération. Nous retrouvons alors des aspects qui nous rappellent les arguments auxquels nous avons fait allusion lorsque nous avons abordé les raisons socio-économiques de l'étalement urbain.

Supposons qu'une ville ait été construite dans un premier temps sous une forme compacte, par exemple carrée. Le long des axes de transport, partant des quatre portes de la ville, quatre quartiers sont ajoutés pendant une première période de croissance. Ensuite, la ville s'étale non seulement le long des axes principaux, mais des axes secondaires se développent. L'aspect réticulé de cette ville a été mis en évidence par la représentation choisie : nous avons choisi comme initiateur un carré dans lequel nous avons symboliquement marqué une croix correspondant à des axes routiers qui le traverse.

Une telle « ville fractale » offre un certain nombre d'avantage en ce qui concerne l'accessibilité à divers types « d'aménités ». Ceci devient évident si nous comparons ce modèle à deux autres modèles pour lesquels nous avons conservé la surface bâtie, mais où nous l'avons répartie de façon différente (**P. Frankhauser et C. Genre-Grandpierre, 1998**) :

- (1) une ville linéaire dont la largeur est celle des carrés de notre ville fractale ;
- (2) une ville compacte de forme quadratique.

Dans les trois modèles, nous avons localisé un certain nombre de centres de service (centre de commerce, services publics ...). Dans le cas de la structure fractale, nous avons supposé que ceux-ci sont placés sur les intersections des différentes branches et qu'il existe une hiérarchie stricte des services offerts : le centre ancien au cœur de l'agglomération offre tous les services de haut-de-gamme, mais aussi tous les services des niveaux inférieurs. Les intersections générées lors de la première étape d'itération sont des centres secondaires d'ordre 1 (c.s.o.1) qui réunissent encore tous les services, exceptés les services haut-de-gammes etc. Les centres suivants dans la hiérarchie sont désignés comme centres secondaires d'ordre 2 (c.s.o.2) etc. Si l'on développe la fractale jusqu'à la quatrième étape d'itération, on obtient le tableau suivant pour le nombre de centres :

Tableau 1-1 Nombre de centres de service selon leur ordre dans la hiérarchie

	c.s.o. 1	c.s.o. 2	c.s.o. 3	c.s.o. 4
Nombre total	1	5	25	125

Nous avons gardé le même nombre de centres de chaque niveau hiérarchique pour les deux autres modèles. Pour la ville compacte, nous avons choisi une répartition homogène des centres de service et une disposition des centres secondaires qui optimise leur accessibilité. On vérifie dans la **fig. 1-8** que les centres secondaires d'ordre 2, situés à proximité du bord du carré sont moins accessibles que ceux localisés plus à l'intérieur. Ce phénomène existe aussi pour les sous-centres d'ordre 3, mais il est moins marqué car moins de centres secondaires de ce type se trouvent à proximité de la bordure (cf. **fig. 1-8**) ; la desserte est donc plus homogène. Pour les centres d'ordre 3 et 4 une solution complètement homogène peut être choisie. Pour la ville linéaire, il est possible de concevoir une disposition parfaitement symétrique et homogène.

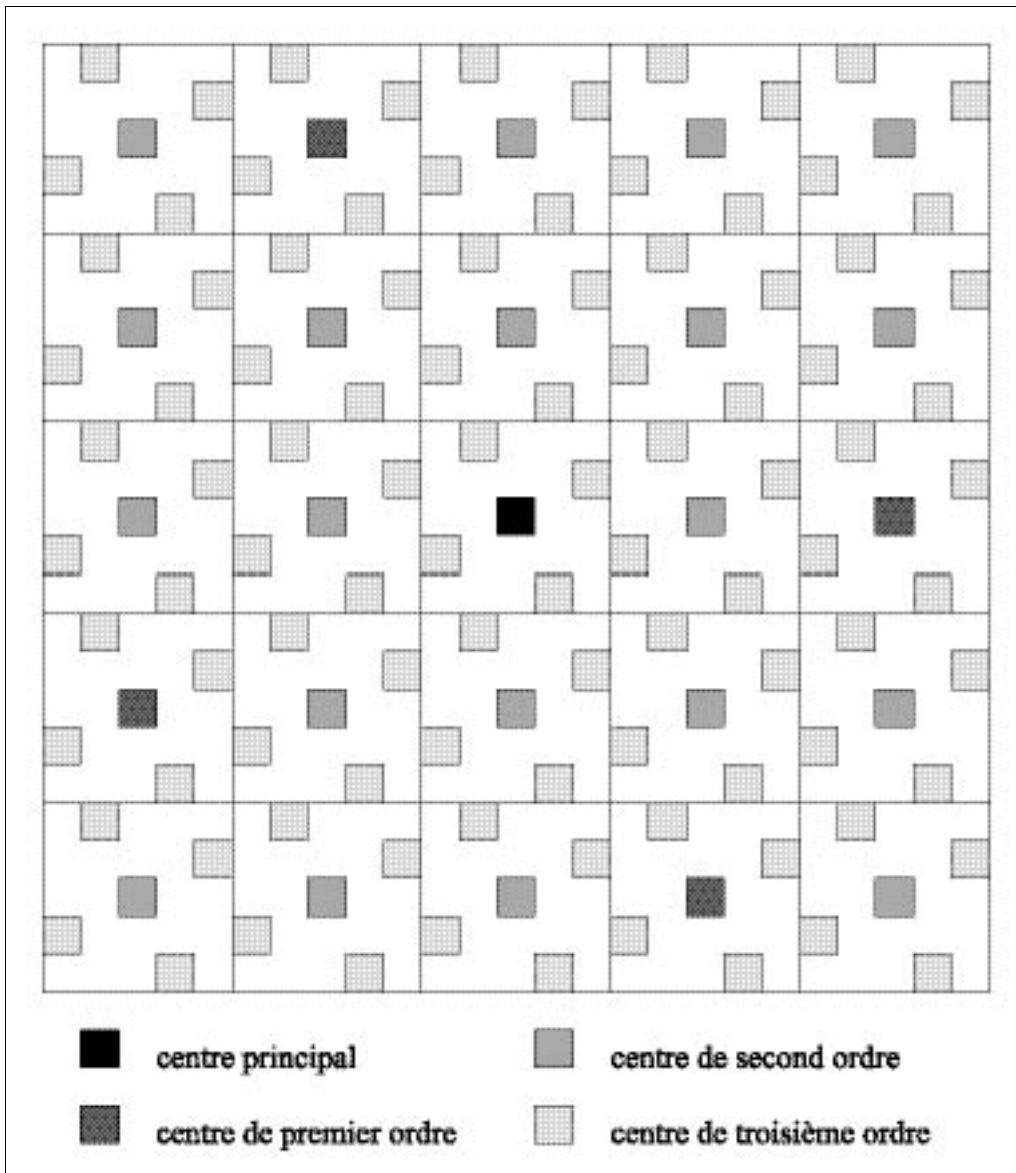


Fig 1-8 *Le modèle de la ville compacte. L'ordre des centres secondaires de service est distingué par différents niveaux de gris*

Pour chacune de ces villes-modèles, nous avons déterminé les distances moyennes aux centres de services les plus proches, considérant chaque niveau hiérarchique. Nous avons aussi calculé la distance minimale pour accéder à la bordure des villes, c'est-à-dire l'accessibilité aux zones non-bâties « rurales » que nous avons considérées comme zones récréatives. Outre les distances moyennes, nous avons calculé pour chaque modèle la distance maximale pour atteindre la zone verte⁵.

Les résultats obtenus montrent que la « ville fractale » se situe entre les deux autres modèles urbains en ce qui concerne les distances aux centres de service et aux zones récréatives : la distance moyenne au centre principal est 2,21 fois plus élevée que pour la structure compacte,

⁵ Toutes les distances ont été obtenues en utilisant un réseau en carroyage qui irrigue l'ensemble des carrés élémentaires (« métrique de Manhattan »). Dans la fractale tous les éléments, sauf les intersections, sont à proximité directe d'un espace vert, pour les intersections la distance est égale à un carré conformément à la métrique appliquée. Pour les détails cf. **Frankhauser, Genre-Grandpierre** (op.cit).

mais pour les centres de service de troisième ordre, autrement dit les centres de proximité, les distances sont équivalentes entre la ville fractale et la structure compacte. En comparaison avec la « ville linéaire », la ville fractale est évidemment largement avantagée. Par exemple, la distance moyenne au centre de service principal est égale à 18 % de celle observée pour la ville linéaire. Concernant la proximité aux zones vertes, la ville fractale se trouve en revanche plus proche de la structure linéaire. Ainsi, pour atteindre la zone verte, la distance moyenne est 16,5 fois plus élevée sur le réseau compact que sur la fractale, mais elle est seulement légèrement plus élevée sur la fractale que sur le réseau linéaire. La distance maximale pour atteindre la bordure de la ville s'élève à 12 unités pour la ville compacte et à *une* unité pour la fractale !

On pourrait donc en conclure qu'une « ville fractale » est intéressante pour des individus fréquentant moins les centres hiérarchiques les plus élevés (centre principal et sous-centre de premier ordre) que les sous-centres de proximité, tout en recherchant la proximité aux zones vertes récréatives.

Cet exemple montre l'intérêt de ce genre de modèles qui permet de comparer et d'analyser les caractéristiques de différents « scénarios spatiaux » dans le but de mieux comprendre les raisons inhérentes à l'organisation spatiale des tissus urbains actuels.

Par sa logique, le tapis de Sierpinski est une structure dans laquelle tous les éléments sont connectés. Il se prête ainsi plutôt à la modélisation des tissus urbains à l'échelle de l'agglomération : à un tel niveau d'observation, on s'intéresse moins à la distinction des maisons ou des îlots, mais plus à la forme de la tache urbaine dans son ensemble. On pense alors de nouveau aux représentations cartographiques simplifiées dans lesquelles on a noirci une grande partie des espaces non-bâties à l'intérieur des villes comme dans les représentations de Berlin ou Stuttgart.

La poussière de Fournier – un modèle pour deux échelles différentes

La logique des poussières de Fournier est proche de celle des tapis de Sierpinski comme le montrent les exemples des **fig. 1-9** et **1-10**. Ce qui distingue cette fractale de la précédente, c'est que ses éléments ne sont plus connectés. Ainsi le nombre d'agrégat M_i croît au fil des itérations selon une loi géométrique :

$$M_i = N^i$$

contrairement au tapis de Sierpinski qui est constitué d'un seul agrégat.

Ce type de modèles peut servir de référence pour étudier deux types de systèmes spatiaux : à l'échelle du quartier urbain, les îlots sont séparés par la voirie et organisés en réseau hiérarchisé. Cette situation correspond à la poussière représentée sur les **fig. 1-9 (a)** où nous avons choisi $N = 4$ et un facteur de réduction de $2/5$. Il s'agit d'une structure qui ressemble au plan d'un quartier. Dans la fractale représentée sur la **fig. 1-9 (b)** nous avons placé les éléments de façon à garder une grande place vide au cœur d'une ville, une sorte de « central park » ou une autre zone de loisir comme à Cergy-Pontoise ou à Saint-Herblain. La prochaine étape d'itération a fait apparaître des espaces vides dans chaque carré occupé, on pourrait donc penser à des places de taille importante. Ces modèles retracent donc bien la hiérarchie des espaces non-bâties à l'échelle intra-urbaine.

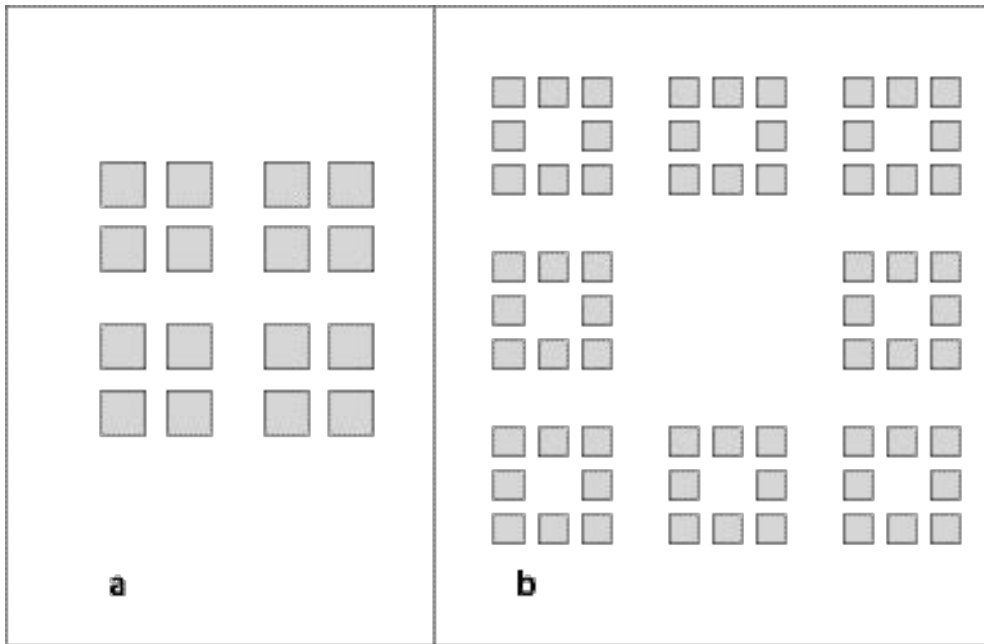


Fig. 1-9 Deux poussières de Fournier en deuxième étape d'itération qui illustrent plutôt une situation intra-urbaine

À l'échelle régionale, le semis des habitats montre des concentrations le long des vallées ou des axes de transport. Une telle situation correspond plutôt à la poussière de la figure (b) où $N = 5$ et $r = 1/5$.

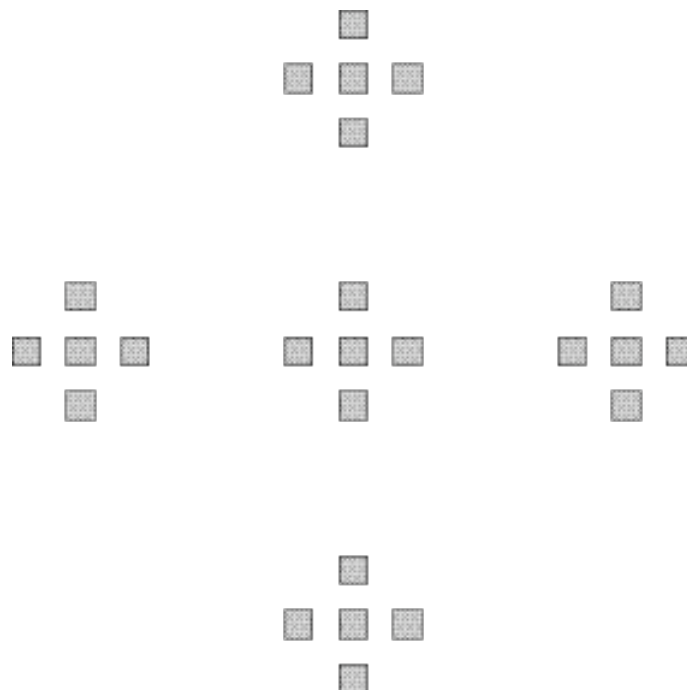


Fig. 1-10 Cette poussière de Fournier montre des concentrations de la surface occupée le long d'axes, une situation qui ressemble à l'étalement tentaculaire de certaines agglomérations

En poursuivant l'itération les poussières de Fournier sont finalement constituées d'ensembles de points isolés qui sont répartis de façon inégale : ils forment des amas séparés par les lacunes générées au cours de l'itération, et dont la taille diminue d'étape en étape. Coexistent donc des endroits de forte concentration et des endroits de faible concentration, tandis que se dessinent une double hiérarchie des tailles des surfaces occupées et des lacunes qui les séparent.

Le téragone – une approche de la complexité de la bordure

L'intérêt principal du tapis de Sierpinski et de la poussière de Fournier est la répartition non-homogène de la surface bâtie. Or une des caractéristiques importante de l'étalement urbain est l'aspect tortueux de la bordure d'une agglomération. Le fait que la bordure du tapis de Sierpinski s'allonge au cours des itérations est un indice montrant que les fractales peuvent servir à étudier ce phénomène. Ceci devient encore plus évident si l'on recourt à un autre modèle, celui du *téragone*. Ici, on génère d'abord un objet de topologie linéaire dont la construction est présentée dans la **fig. 1-11 (a)**. La figure initiale est une section de droite de longueur donnée $l_0 = L$. Le générateur remplace cette figure par un polygone composé de $N = 8$ sections de droite de longueur $1/4 L$. Cette logique est ensuite appliquée à chacune des huit sections de droite etc. Ainsi la longueur $l_n = r \times l_{n-1}$ des éléments tend vers *zéro* tandis que la longueur totale de l'objet L_n d'une étape n tend finalement vers l'infini :

$$L_n = N_n \cdot l_n = N^n \cdot r^n = (N \cdot r)^n = 2^n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \infty$$

Dans la **fig. 1-11 (b)** quatre de ces courbes sont disposées bout à bout. Elles délimitent ainsi une surface qui est un carré au départ et dont la superficie demeure constante au cours des itérations. Cette structure est appelée « téragone ». En interprétant cette structure comme une ville, nous supposons que la masse bâtie est répartie de façon homogène à l'intérieur du téragone. Nous pouvons donc interpréter le carré initial de la figure comme le modèle d'une ville de surface donnée dont le tissu bâti est très homogène et qui est délimité par une enceinte quadratique. Au cours de l'itération, la structure s'étend progressivement en surface, la bordure ressemblant, par son aspect sinueux, de plus en plus aux tissus urbains réels.

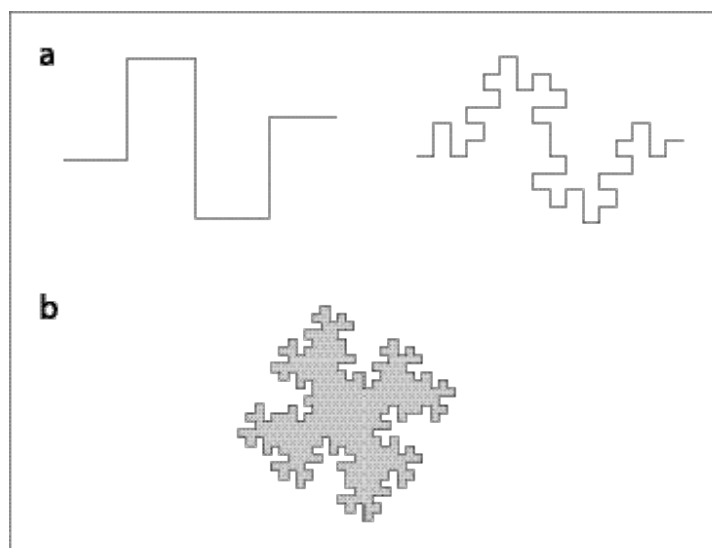


Fig. 1-11 *Les deux premières étape de construction de la bordure du téragone (a) et la figure complète (b)*

Nous considérons maintenant les étapes d'itération comme différents modèles d'une ville. La figure initiale, la « ville carrée », offre peu de terrains en bordure. L'allongement progressif de la bordure lors des prochaines étapes permet à un nombre croissant d'acheteurs d'acquérir des terrains situés en bordure de la ville. Ceci leur permet de bénéficier de la proximité à un paysage ouvert tant que les poches vertes qui entrent dans la « surface bâtie » ne sont pas trop petites. On peut vérifier qu'en passant de la figure initiale aux étapes d'itération suivantes, le nombre de terrains situés en bordure double chaque fois. En outre, chaque étape génère des poches non-occupées, donc « vertes », qui pénètrent de plus en plus profondément dans la surface bâtie. On vérifie que la distance minimale entre la bordure et le centre de la structure tend vers une limite qui est égale au tiers de la taille du carré initial. De même, la taille de la structure générée ne dépasse, pour aucune étape d'itération, $5/3$ de cette longueur. Celle-ci correspond à la distance maximale qui existe entre la bordure et le centre. Par ailleurs, comme la surface bâtie à l'intérieur de la structure reste identique pour toutes les itérations, il n'y a aucune différence de consommation d'espace entre les différentes étapes considérées.

On pourrait remarquer qu'une telle structure étalée diminue l'accessibilité au centre de la ville. Nous avons donc comparé d'une part le gain d'accessibilité à la bordure en calculant pour les premières étapes d'itération la distance minimale moyenne à la bordure. D'autre part, nous avons calculé la distance minimale au centre. On constate pour la première étape un allongement de 12 % de la distance moyenne au centre, donc une perte d'accessibilité. En revanche la distance à la bordure est raccourcie à 56 % de sa longueur initiale ! L'accessibilité à la bordure de la ville s'est même améliorée pour ceux qui habitent au centre-ville car des poches vertes pénètrent maintenant dans le tissu bâti. Pour la deuxième étape, les modifications sont moins spectaculaires : la perte pour accéder au centre est de 4 % contre un gain de 9 % pour atteindre les bordures⁶. *Ainsi le gain d'accessibilité aux zones vertes, dont nous supposons qu'elles entourent la zone bâtie, est donc plus important que la perte d'accessibilité au centre ville.*

Il s'avère donc que la forme tentaculaire représente un avantage par rapport à une forme compacte pour ceux qui souhaitent bénéficier d'une proximité aux zones récréatives sans toutefois s'éloigner trop du centre ville. Le seul inconvénient, l'allongement relativement faible de la distance au centre ville, peut être en partie compensé, si l'on suppose que ce centre concentre notamment des services rares comme des magasins spécialisés et qu'il existe des centres commerciaux à l'échelle des quartiers ainsi que des services banals dans chaque îlot urbain (**Frankhauser 2000**). Ceci montre les avantages non-négligeables d'une structure étalée – sous conditions qu'elle soit organisée de façon « rationnelle ». *Rappelons que dans ce modèle la forme étalée ne consomme pas plus d'espace qu'une forme compacte.*

K. Humpert et al. (1991) ont pu vérifier que la distance maximale pour atteindre la limite de la zone bâtie est dans 90 % des cas de 5,5 km et ne dépasse jamais 6 km. Une telle situation trouve son explication dans une forte articulation entre zones récréatives et zones urbanisées – donc dans une forme non-compacte du tissu urbain.

1.1.3 Des modèles plus complexes

Nous avons pu constater que chacun des modèles fractals présentés transcrit des propriétés spécifiques des tissus urbains. Il est évident qu'en réalité ces caractéristiques apparaissent simultanément. Or il est possible de combiner les caractéristiques des différents modèles en

⁶ Pour la déduction complète cf. FRANKHAUSER, P. (2000).

construisant des *modèles mixtes* dont nous présentons quelques exemples afin d'illustrer la richesse des formes qui peuvent être obtenues en recourant à la géométrie fractale. Toutefois les trois modèles « purs » restent les références fondamentales, car ils constituent la base des modèles plus complexes.

Seuls les modèles qui s'inscrivent dans une logique *multifractale* font preuve d'un véritable élargissement conceptuel.

Modèles mixtes

Les modèles « surfaciques » que nous avons présentés sont à chaque étape constitués soit d'un *seul agrégat* (tapis de Sierpinski) soit d'*éléments de même taille* (poussière de Fournier). Une telle situation ne correspond pas à la réalité, car les zones métropolitaines sont constituées d'un nombre important de villages et de villes, comme le montre l'exemple de Stuttgart (**fig. 1-3**). Nous avons constaté que la surface de ces taches urbaines suit une loi de distribution hiérarchique très régulière du type de Pareto-Zipf. Nous présentons trois exemples de fractales construites dans lesquels on génère au cours des étapes d'itération des agrégats qui suivent une telle logique hiérarchique.

Le premier exemple combine la logique de la poussière de Fournier et celle du tapis de Sierpinski (**Fig 1-12**). Le générateur est composé de $N_{tot} = 13$ éléments et le facteur de réduction est $r = 1/5$. Cependant $N_{ext} = 4$ éléments sont isolés et forment des « îles » à l'extérieur d'un agrégat central. Celui-ci est constitué de $N_{int} = 9$ éléments connectés qui forment une croix. En poursuivant l'itération, la croix centrale se ramifie d'une manière semblable que le tapis de Sierpinski. Des agrégats de forme équivalente, mais à une échelle réduite, se développent dans les agrégats isolés et en même temps de plus en plus d'agrégats isolés sont générés. La **fig. 1-12** montre la deuxième étape d'itération. Ainsi, se développe une hiérarchie d'agrégats emboîtés. Soulignons que ces agrégats sont toujours répartis de façon très inégale dans l'espace ; ils sont concentrés dans des amas emboîtés.

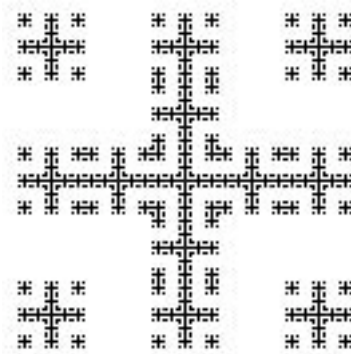


Fig. 1-12 Une fractale mixte composée d'un agrégat central et d'un nombre croissant d'agrégats de taille de plus en plus petite emboîtés. La figure montre la seconde étape d'itération

Un autre modèle utilise la logique du téragone pour faire émerger des agrégats de taille différente dont la bordure est de plus en plus tortueuse. Les agrégats peuvent même être troués par des lacunes dont la taille varie également. L'exemple représenté sur la **fig. 1-13** s'inspire de plusieurs fractales proposées par **Mandelbrot (1983)**. Dans cet exemple, une section de droite est réduite par un facteur $r = 1/5$. Dans le générateur $N_{bord} = 10$ de ces

éléments forment une polyligne qui remplace la section de droite initiale. En plus deux « îles » carrées sont ajoutées, chacune constituée de $N_{île} = 4$ éléments de même taille que les éléments de la polyligne. Dans la **fig. 1-13** ce générateur est marqué en gras. Quatre de ces générateurs forment alors le téragone complet en première étape d'itération. Les îles situées à l'intérieur du téragone deviennent ainsi des lacunes vides. Le générateur du téragone est donc composé d'un agrégat central qui contient quatre lacunes à l'intérieur et qui est entouré de quatre îles à l'extérieur dont la surface a été noircie.

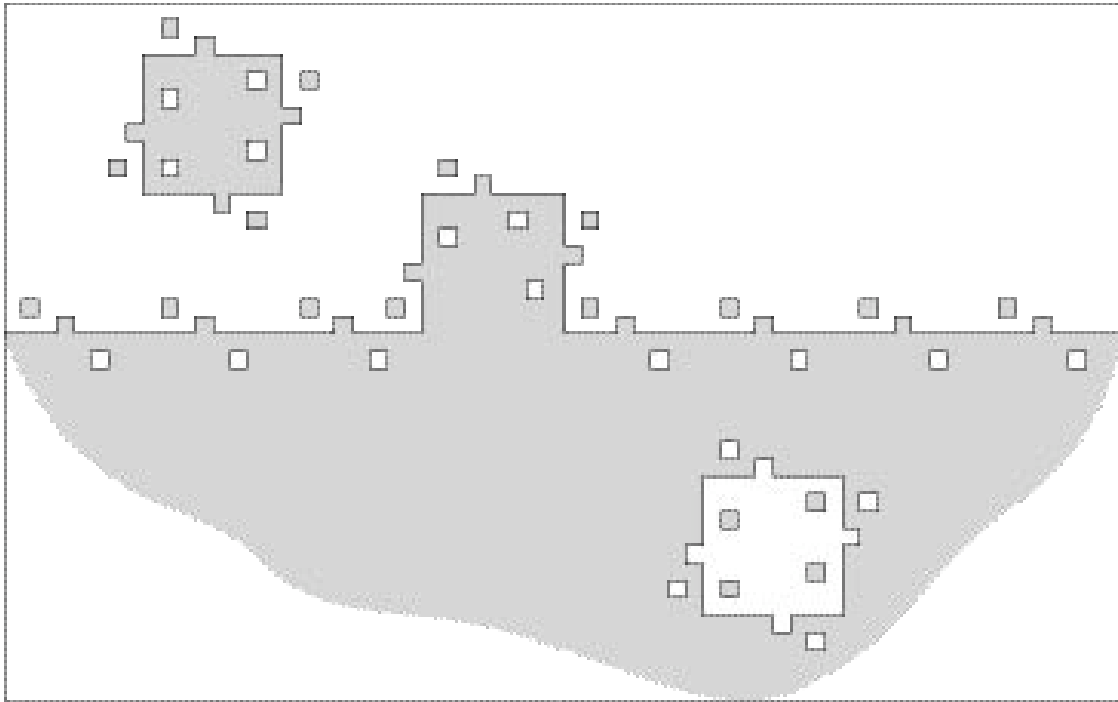


Fig. 1-13 *Un téragone entouré d'îles et troué par des lacunes : la figure montre une partie de la fractale obtenue en deuxième étape d'itération*

Au cours de l'itération, de plus en plus d'« îles » apparaissent autour de celles qui ont été générées lors des étapes précédentes. À chaque étape, l'agrégat central et les îles sont troués par de nouvelles lacunes dont la taille diminue à chaque étape d'itération. L'exemple de la deuxième étape montre déjà ce principe hiérarchique.

Ce modèle s'approche encore plus de la morphologie des tissus urbains réels, si on pense aux représentations cartographiques simplifiées de Stuttgart et de Berlin (cf. **fig. 1-2**).

Les modèles multifractals

Dans les tapis de Sierpinski ou les poussières de Fournier tous les éléments, donc les carrés, ont, à une étape d'itération donnée, la même taille. Dans le modèle mixte de la **fig. 1-12** il a déjà été possible de faire apparaître des agrégats de taille différente. Cet aspect est encore plus présent dans des tapis de Sierpinski ou des poussières de Fournier qui sont conçus selon une logique multifractale. On obtient une telle structure multifractale en combinant dans le générateur plusieurs facteurs de réduction r_i . Au cours de l'itération apparaissent ainsi des facteurs mixtes du genre $r_1^n \cdot r_2^m$. Dans la **fig. 1-14**, deux facteurs de réduction ont été appliqués à une figure initiale carrée. Le premier facteur $r_1 = 1/2$ sert à générer un carré qui

est placé au centre du carré initial et un second facteur $r_2 = 1/4$ est utilisé pour générer les quatre carrés placés autour du carré central. L'étape suivante montre déjà des carrés de trois tailles différentes qui correspondent aux facteurs mixte r_1r_2 , r_1^2 et r_2^2 .

En opposition aux multifractales on parlera d'*unifractales* pour désigner des structures à un seul facteur de réduction. Il existe d'autres possibilités pour élargir le concept de base de la géométrie fractale. On peut par exemple faire varier le facteur de réduction de façon progressive dans une unifractale lors de l'itération. Ainsi la logique du principe hiérarchique sous-jacent change.

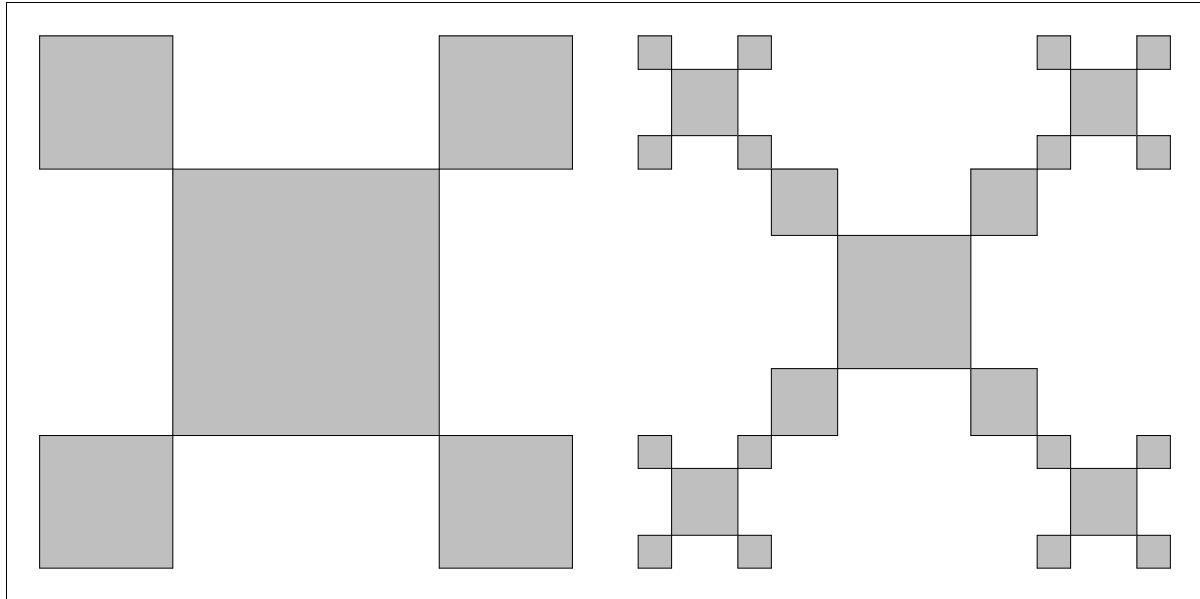


Fig. 1-14 Construction d'un tapis de Sierpinski multifractal. À gauche le carré initial dans lequel est placé le générateur. À droite la seconde étape d'itération dans laquelle des facteurs de réduction mixtes génèrent des carrés de taille différente ; une hiérarchie spatiale apparaît

Les fractales aléatoires

L'aspect symétrique des fractales construites ne correspond pas aux structures observées réelles qui paraissent irrégulières tels que les tissus urbains. Afin d'obtenir des figures d'allure moins artificielle, il est possible d'introduire des éléments aléatoires dans la construction d'une fractale (modèle stochastique) sans que ses propriétés fractales ne soient changées : par exemple dans le cas d'un tapis de Sierpinski, comme le générateur n'est défini que par les paramètres N et r , nous sommes libres de choisir à chaque étape la position des éléments à condition de respecter les lacunes engendrées lors des étapes précédentes. On peut ainsi obtenir des figures qui ressemblent beaucoup plus à des structures observées. Leur mode de construction rappelle celui des modèles dynamiques fondés sur des automates cellulaires, qui sont utilisés pour simuler l'émergence de formes complexes (**fig. 1-15**)

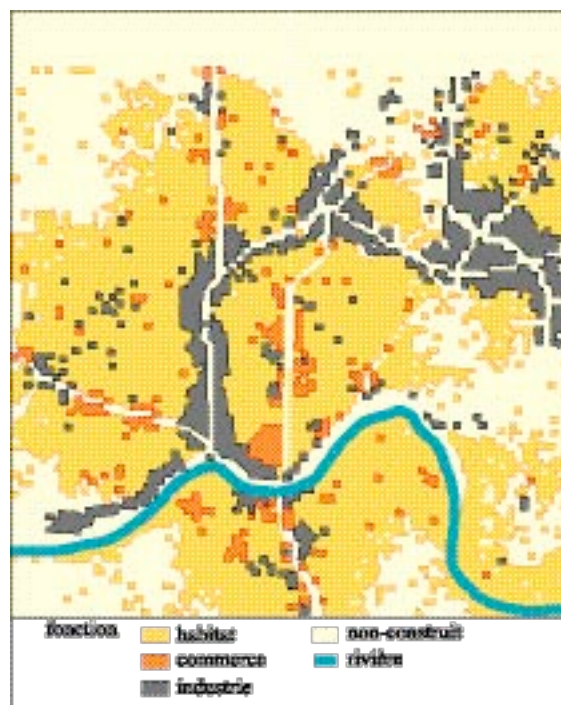


Fig. 1-15 *Le résultat d'une simulation d'un tissu urbain, réalisé à partir du modèle de R. White et G. Engelen, à partir d'un modèle d'automates cellulaires. L'organisation spatiale du tissu suit une loi fractale R. White et G. Engelen (1994)*